گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم



پاییز ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۵ آبان‌ماه ۱۴۰۵

$\frac{۱}{۸}$ نیم‌سال اول دوازدهم

$\frac{۱}{۵}$ پایهٔ دهم

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۶

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	مهرداد کیوان حسین شفیع‌زاده رسول حاجی‌زاده	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان علی منصف‌شکری ـ کیوان دارابی	ندا فرهختی ـ مائده بادان‌فیروز حمیدرضا ولی‌پور ـ یزدان نیک‌قدم ارسلان حسنوند ـ علی اسدی سپهر عندلیب‌مقدم
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سجاد صادقی‌زاده ـ سعید احمدی ـ سارا قانع زهره آقامحمدی ـ محمدجواد سورچی سینا محمدی ـ مجید رجبی‌وندچالی حسین عبدوی‌نژاد ـ ابوالفضل صادقی محسن قندچلر ـ سینا قاضی‌سعیدی مصطفی واثقی	محمدجواد سورچی حنا خلعتبری ایلیا فقیه‌میرزائی
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ طاها حق‌بین فرهنگ امیری ـ فاطمه محمودی ـ علی ترابی مهسا بایمانی‌نژاد ـ محمد کهنه‌پوشی عالیه میرزایی ـ علی‌رضا ستوده یاشار فیض‌اللهی ـ محمدحسین رضازاده مجتبی محجوب	طاها حق‌بین ـ محمد دارابی‌جم محمدرضا جمشیدی محمد داودآبادی‌فراهانی محمدمهدی معظمی ایلیا جمارانی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.
راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور

قسمت سوم

روش مطالعه درس‌های خوندنی

تا حالا فکر کردی چرا بعضی از دانش‌آموزا با وجود نمره‌های عالی توی مدرسه، سر کنکور نتیجه نمی‌گیرن؟ چون فکر می‌کنن کنکور فقط نسخهٔ سخت‌تر امتحانات نهاییه و با همون روش‌ها براش آماده می‌شن! در حالی که کنکور قواعد متفاوتی داره و موفقیت توی اون به روش مطالعهٔ متفاوتی نیاز داره. بیا ببینیم این تفاوت‌ها چطور روی یادگیری و تست‌زنیت تأثیر می‌ذارن...

فرق کنکور با امتحان نهایی

کنکور چه فرقی با امتحانای مدرسه داره؟ آیا سبک مطالعه ۱۲ سال گذشته رو باید برای کنکور کلاً شخم زد؟ جواب قطعی: بله! کنکور و امتحان نهایی حداقل ۵ فرق اساسی دارن:

۱. جامعیت: توی کنکور همه درسا با هم میان، توی امتحان مدرسه فقط یک کتاب.

۲. زمان:برای هر تست حدود یک دقیقه وقت داری، ولی توی مدرسه زمان حسابی دست‌ودل‌بازانه‌ست.

۳. نتیجه‌گرایی: کنکور فقط گزینه آخر رو می‌خواد؛ توی تشریحی، فرمول و راه‌حل هم نمره داره.

۴. استقامت: نشستن مداوم پای دفترچه کنکور انرژی و تمرکز بالایی می‌خواد.

۵. نمره منفی: پاسخ غلط توی مدرسه بی‌خطره، ولی توی کنکور ترازت رو نابود می‌کنه!

این تفاوت‌ها یعنی باید از مطالعهٔ بقچه‌ای فاصله بگیری و سراغ «تنوع‌خوانی» بری تا به جابه‌جایی سریع بین درس‌ها عادت کنی. توی این مقاله روش مطالعهٔ درس‌های خوندنی مثل زیست، زمین‌شناسی، بعضی از دروس انسانی و بخش‌هایی از شیمی و فیزیک رو یاد می‌گیریم؛ درس‌های تمرینی بمونه برای مقالهٔ بعدی.

روش مطالعهٔ مباحث خوندنی

اگه قراره مطلبی رو توی ۷۵ دقیقه بخونی، این زمان رو به سه قسمت تقسیم کن:

۵ دقیقه اول	۶۰ دقیقه اصلی	۱۰ دقیقه پایانی
تیترخوانی	مطالعهٔ دقیق	مرور و جمع‌بندی

(این زمان‌ها تقریبی هستن و بسته به حجم مطالعهٔ تو ممکنه کمی تغییر کنن.)

۵ دقیقه اول؛ تیترخوانی

توی این مرحله سعی کن موضوع مورد مطالعه رو برات جذاب کنی. تیترها رو بخون و از خودت بپرس: «قراره با خوندن این مطلب چی یاد بگیرم و جواب چه سؤال‌هایی رو پیدا کنم؟»

درست مثل تیتر روزنامه یا خبری که ترغیبت می‌کنه ادامه‌ش رو بخونی، این کار باعث می‌شه منفعلانه درس نخونی و با اشتیاق دنبال جواب سؤال‌هات بگردی.

۶۰ دقیقه اصلی؛ مطالعه دقیق

مطالعه‌ات نباید رفع تکلیفی باشه. دنبال پاسخ سؤال‌هایی باش که توی مرحلهٔ اول برای خودت ساختی. یه دفتر یادداشت هم کنار دستت داشته باش؛ چون قراره حسابی به کارت بیاد.

۱۰ دقیقه پایانی؛ مرور و جمع‌بندی

این ۱۰ دقیقه رو برای مرور مطالبی بذار که خوندی. فرض کن یه فیلم یا سریال دیدی و می‌خوای خلاصه‌ش رو برای دوستت تعریف کنی؛ همین کار به ماندگاری مطالب توی ذهنت کمک می‌کنه.

شاید عادت کردن به این روش کمی زمان ببره، اما ارزشش رو داره. ۵ دقیقه تیترخوانی و ۱۰ دقیقه جمع‌بندی، به‌اندازهٔ ۶۰ دقیقهٔ مطالعهٔ اصلی اهمیت دارن و باعث می‌شن مطالب بهتر توی ذهنت بمونن و برای مرورشون در آینده زمان کمتری بذاری.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

حالا بریم سراغ دفتر یادداشت!

اول از همه بدون که یادداشت‌برداری با رونویسی خیلی فرق داره. یادداشت‌برداری زمانی انجام می‌شه که مطلبی برات جا افتاده و وسط مطالعه با خودت می‌گی: «آها!». یعنی مطلب رو فهمیدی و حالا باید چیزی رو که فهمیدی، با زبون خودت بنویسی. حتی اگه آخر مطالعه همهٔ یادداشت‌هات رو آتیش بزنی، همین فرایند یادداشت‌برداری به تثبیت مطالب توی ذهنت کمک می‌کنه.

چطور؟

وقتی مطلبی رو یادداشت می‌کنی، چهار بار از ذهنت عبور می‌کنه:

۱. وقتی مطلب رو می‌فهمی.

۲. وقتی مغزت مطالب یادگرفته‌شده رو با جمله‌بندی جدید بازسازی می‌کنه.

۳. وقتی دستت دستور مغز رو برای نوشتن اجرا می‌کنه.

۴. وقتی چشم‌هات یادداشت رو می‌بینن و می‌خونن.

کسی که یادداشت‌برداری نمی‌کنه، فقط مرحلهٔ اول رو برای مرور داره؛ اما تو سه مرحلهٔ دیگه هم تجربه می‌کنی. این فرایند، در کنار سه مرحلهٔ تیترخوانی، مطالعهٔ اصلی و جمع‌بندی، به تثبیت بیشتر مطالب کمک می‌کنه و مطالعهٔ تو رو اثربخش‌تر می‌کنه.

اما کاربردهای اصلی دفتر یادداشت هنوز باقی مونده!

دفتر یادداشت؛ ابزار مرور روزانه

با یادداشت‌برداری، ابزار مرورهای بعدی رو آماده کردی. بر اساس یافته‌های لایتنر، بخش زیادی از مطالب به‌مرور از یاد می‌رن؛ پس مرور یادداشت‌ها در پایان روز کمک می‌کنه جلوی این فراموشی رو بگیری.

«درس هر روز در همان روز» فقط یه شعار نیست! مرور مطلب همون روز ممکنه فقط ۱۰ دقیقه وقتت رو بگیره، اما اگه به یک هفته بعد موکولش کنی، شاید به‌اندازهٔ مطالعهٔ اولیه زمان لازم داشته باشی؛ تا پایان نیمسال هم این زمان می‌تونه چند برابر بشه.

پس مرور روزانه، هفتگی و ماهانه رو توی برنامه‌ات بذار. یادت باشه: بیشتر از مطالبی که نخوندی، نگران مطالبی باش که خوندی؛ تا روز آزمون بتونی از زحمتی که کشیدی نتیجه بگیری.

دروس خوندنی رو کی تست بزنم؟

اگه بلافاصله بعد از مطالعه تست بزنی، ممکنه احساس یادگیری کاذب داشته باشی؛ چون هنوز نمی‌تونی مطمئن باشی مطالب به حافظهٔ بلندمدتت منتقل شدن.

برای همین توصیه می‌کنیم تست درس‌های خوندنی رو به ۴۸ تا ۷۲ ساعت بعد از مطالعه موکول کنی. این‌طوری بهتر متوجه می‌شی کدوم مطالب توی ذهنت موندن و کدوم‌ها فرّار هستن و نیاز به مرور بیشتری دارن.

این مطالب فرّار رو باید به‌طور ویژه یادداشت کنی؛ درست مثل همون نکاتی که روز آزمون کشف می‌کنی و برای اینکه دیگه فراموششون نکنی، می‌بری‌شون توی انفرادی!

پس تکلیف مشخص شد. با همهٔ قفل‌وبست‌هایی که روی مطالب می‌زنیم، باز هم ممکنه بعضی نکات اون‌قدر فرّار و چموش باشن که روز آزمون از ذهنمون بپرن. بنابراین باید باهاشون ویژه‌تر رفتار کنیم تا موندگار بشن؛ یعنی این مطالب رو جداگانه یادداشت و به‌صورت هدفمند مرور کنیم.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

سختی تصادفی بعضی دروس در آزمون های ماز

مازی عزیز!

سطح سؤالات کنکور همیشه قابل پیش‌بینی نیست؛ ممکنه بعضی درس‌ها سخت‌تر یا آسون‌تر از چیزی باشن که انتظار داری.

برای همین، توی بعضی آزمون‌های ماز، به صورت تصادفی و غیرقابل پیش‌بینی، گاهی بعضی درس‌ها رو سخت‌تر طراحی می‌کنیم.

چرا؟

که روز کنکور غافلگیر نشی!

چون توی آزمون ماز فقط نکات کنکور رو برات پیش‌بینی نمی‌کنیم؛ بلکه شرایط مختلف کنکور رو هم برات شبیه‌سازی می‌کنیم.

پس اگه با یه درس سخت توی آزمون ماز مواجه شدی، بدون که داریم برای روزی آماده‌ات می‌کنیم که ممکنه کنکور سخت‌تر از انتظار تو باشه.

باتشکر
واحد آزمون ماز

پاسخنامه کلیدی

ریاضیات

۱	۱	**۲**	۳	۴	۱۱	۱	۲	**۳**	۴
۲	**۱**	۲	۳	۴	۱۲	۱	**۲**	۳	۴
۳	**۱**	۲	۳	۴	۱۳	۱	**۲**	۳	۴
۴	۱	۲	۳	**۴**	۱۴	**۱**	۲	۳	۴
۵	۱	**۲**	۳	۴	۱۵	۱	۲	۳	**۴**
۶	**۱**	۲	۳	۴	۱۶	۱	۲	۳	**۴**
۷	**۱**	۲	۳	۴	۱۷	**۱**	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	**۴**	۱۸	۱	۲	**۳**	۴
۹	۱	**۲**	۳	۴	۱۹	**۱**	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	**۳**	۴	۲۰	۱	۲	**۳**	۴
۲۱	**۱**	۲	۳	۴	۳۱	۱	**۲**	۳	۴
۲۲	۱	۲	**۳**	۴	۳۲	**۱**	۲	۳	۴
۲۳	**۱**	۲	۳	۴	۳۳	**۱**	۲	۳	۴
۲۴	۱	**۲**	۳	۴	۳۴	۱	**۲**	۳	۴
۲۵	۱	**۲**	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	**۴**
۲۶	۱	۲	**۳**	۴	۳۶	**۱**	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	**۴**	۳۷	**۱**	۲	۳	۴
۲۸	۱	**۲**	۳	۴	۳۸	۱	۲	**۳**	۴
۲۹	**۱**	۲	۳	۴	۳۹	۱	**۲**	۳	۴
۳۰	۱	۲	**۳**	۴	۴۰	۱	**۲**	۳	۴

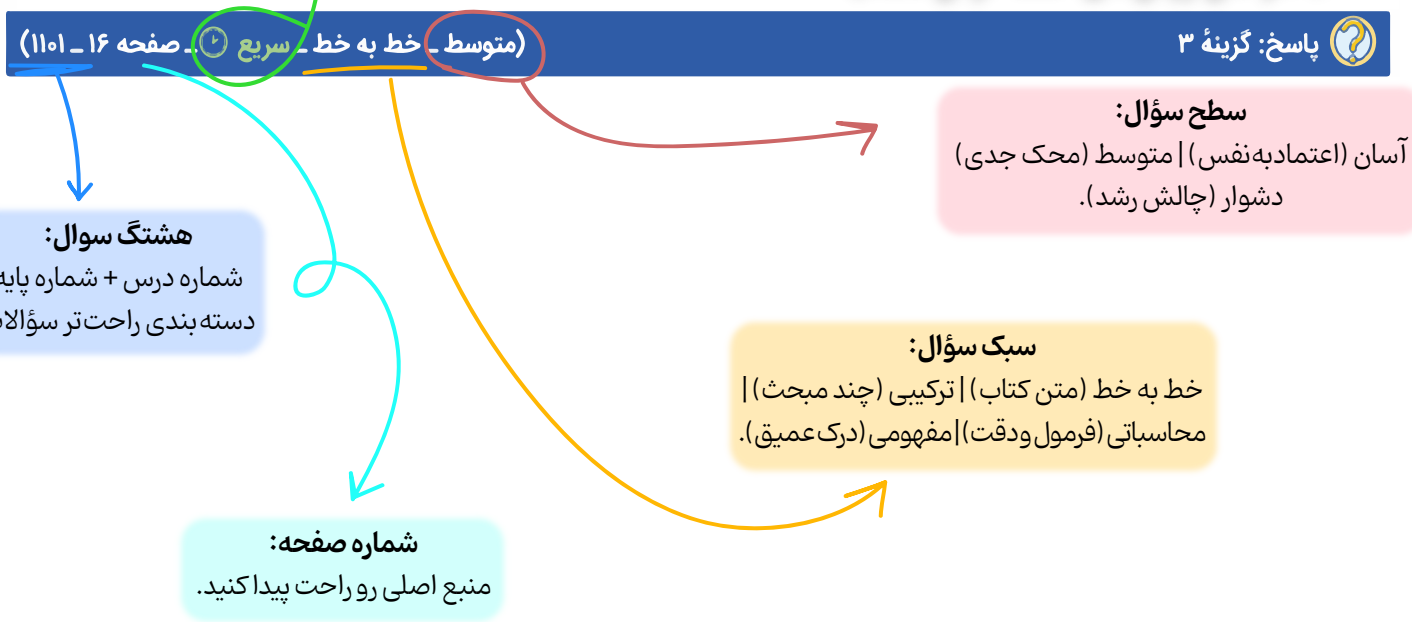
فیزیک

۴۱	۱	۲	**۳**	۴	۵۱	۱	**۲**	۳	۴
۴۲	۱	**۲**	۳	۴	۵۲	۱	۲	**۳**	۴
۴۳	۱	۲	۳	**۴**	۵۳	۱	۲	۳	**۴**
۴۴	۱	۲	**۳**	۴	۵۴	۱	**۲**	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	**۴**	۵۵	۱	۲	۳	**۴**
۴۶	۱	**۲**	۳	۴	۵۶	۱	۲	**۳**	۴
۴۷	۱	**۲**	۳	۴	۵۷	۱	۲	**۳**	۴
۴۸	۱	۲	**۳**	۴	۵۸	۱	**۲**	۳	۴
۴۹	۱	**۲**	۳	۴	۵۹	۱	**۲**	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	**۴**	۶۰	**۱**	۲	۳	۴
۶۱	۱	**۲**	۳	۴					
۶۲	۱	**۲**	۳	۴					
۶۳	۱	**۲**	۳	۴					
۶۴	**۱**	۲	۳	۴					
۶۵	**۱**	۲	۳	۴					

شیمی

۶۶	۱	**۲**	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	**۴**
۶۷	۱	۲	۳	**۴**	۷۷	۱	**۲**	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	**۴**	۷۸	**۱**	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	**۳**	۴	۷۹	۱	۲	۳	**۴**
۷۰	۱	**۲**	۳	۴	۸۰	**۱**	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	**۴**	۸۱	**۱**	۲	۳	۴
۷۲	**۱**	۲	۳	۴	۸۲	۱	۲	**۳**	۴
۷۳	**۱**	۲	۳	۴	۸۳	۱	۲	**۳**	۴
۷۴	۱	۲	**۳**	۴	۸۴	۱	۲	**۳**	۴
۷۵	۱	**۲**	۳	۴	۸۵	۱	۲	**۳**	۴
۸۶	۱	۲	**۳**	۴					
۸۷	۱	۲	۳	**۴**					
۸۸	۱	**۲**	۳	۴					
۸۹	۱	**۲**	۳	۴					
۹۰	۱	۲	**۳**	۴					
۹۱	۱	۲	**۳**	۴					
۹۲	۱	۲	۳	**۴**					
۹۳	۱	۲	**۳**	۴					
۹۴	۱	۲	**۳**	۴					
۹۵	۱	**۲**	۳	۴					

راهنمای پاسخنامه آزمون ها



یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: مثلثات، صفحه‌های ۲۳ تا ۳۴
ریاضی پایه: مثلثات، ریاضی ۱ صفحه‌های ۲۸ تا ۴۶ + حسابان ۱ صفحه‌های ۹۱ تا ۱۰۴
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها (از ابتدای حل دستگاه تا ابتدای دترمینان و کاربردهای آن)، صفحه‌های ۲۳ تا ۲۶
هندسه پایه: قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن، هندسه ۱ صفحه‌های ۳۸ تا ۴۹
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (از ابتدای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک تا ابتدای فعالیت)، صفحه‌های ۱۳ تا ۲۲

سهم در کنکور

حسابان ۲: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: از این مبحث به‌طور مستقیم تستی در کنکور طرح نشده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

خیلی سریع قبل از دیدن پاسخ‌نامه، چند تا نکتهٔ مهم رو راجع به آزمون باهم بررسی کنیم:

۱- فصل «مثلثات» از فصل‌های پرحجم و مهم کنکور است که اهمیت آن را در جدول زیر می‌بینید:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
مثلثات	۳ الی ۴ تست	۳ نمره

۲- مثلثات یکی از موضوعاتی است که در کلاس دهم، یازدهم و دوازدهم مطرح شده است و این یعنی «اهمیت». اطلاعات مثلثاتی شما پله‌پله در هر پایه کامل‌تر می‌شود، مثلاً در پلهٔ آخر رسم توابع مثلثاتی را می‌بینید که هم به دامنه و برد، هم تبدیل توابع و هم تعیین ضرایب تابع نیاز پیدا می‌کند.

۳- وقتی یک مطلب در سه کتاب تکرار می‌شود یعنی «تست ترکیبی». مانند اتحادهای مثلثاتی و نسبت‌های کمان‌های خاص و تست‌هایی که با هندسه ترکیب می‌شوند!

۴- دیدن تست‌های خوب و مناسب می‌تواند به شما قدرت حل سؤال بدهد و این یعنی «تلاش». این روزها تست‌های کنکور تجربی خیلی شبیه تست‌های حسابان شده‌اند! پس به تست‌های رشتهٔ تجربی نیز توجه کافی داشته باشید.

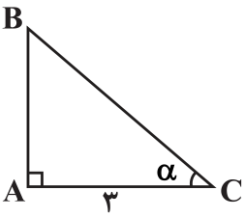
۵- بررسی و تحلیل جواب آزمون حتماً به شما آموزش مناسب می‌دهد و این یعنی «تدبیر». ما در آزمون‌های ماز از تست‌های کنکوری و شبیه‌سازهای کنکور با الهام گرفتن از آن برای شما سؤال طرح می‌کنیم، پس حتما تحلیل آزمون بعد از آن می‌تواند در حل تست‌های مهم و ترکیبی یا خلاقانهٔ مثلثات به شما کمک کند.

مهم‌ترین قسمت‌های مبحث مثلثات، مباحث مربوط به «اتحادهای مثلثاتی» و «نمودار مثلثاتی» است که در این آزمون هم مثل همیشه تلاش کرده‌ایم به خوبی تمام مباحث را پوشش دهیم.

موفق باشید.

حسین شفیع‌زاده و مهرداد کیوان ـ مسئولین درس حسابان آزمون‌های تستی ماز

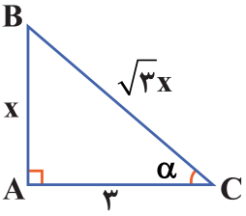
۱- در شکل مقابل $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$، مقدار BC کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۲}$
۲) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به آنکه $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و اینکه $\sin\alpha=\frac{AB}{BC}$ پس فرض می‌کنیم $AB=x$ و داریم:



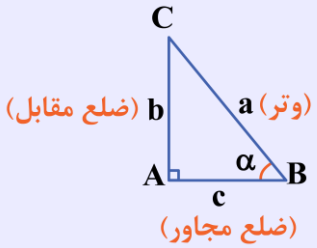
$$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow\frac{x}{BC}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow BC=\sqrt{۳}x$$

حال طبق فیثاغورس داریم:

$$x^۲+۹=۳x^۲\Rightarrow ۲x^۲=۹$$

$$x^۲=\frac{۹}{۲}\xrightarrow{x>۰}x=\frac{۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow BC=\sqrt{۳}\times\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}$$

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه



$$\sin\alpha=\frac{b}{a}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\qquad \tan\alpha=\frac{b}{c}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

$$\cos\alpha=\frac{c}{a}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}\qquad \cot\alpha=\frac{c}{b}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

۲- اگر انتهای کمان x در ناحیهٔ سوم دایرهٔ مثلثاتی واقع شده باشد، ساده‌شدهٔ $\cot^۲x(\cos x-\frac{۱}{\cos x})\sqrt{۱+\tan^۲x}$ با مقدار $\tan ۳\theta$ برابر است. مقدار θ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۱۲}$
۲) $\frac{\pi}{۱۸}$
۳) $\frac{\pi}{۹}$
۴) $\frac{\pi}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۰۰۲)

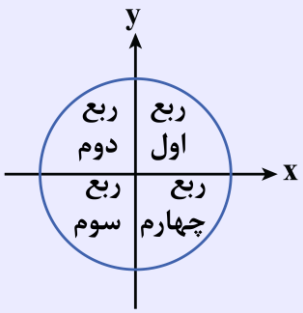
ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\cot^۲x(\cos x-\frac{۱}{\cos x})\sqrt{۱+\tan^۲x}=\cot^۲x(\frac{\cos^۲x-۱}{\cos x})\frac{۱}{|\cos x|}=\frac{\cos^۲x}{\sin^۲x}(\frac{-\sin^۲x}{\cos x(-\cos x)})=۱$$

پس ساده‌شدهٔ عبارت عدد یک خواهد شد، یعنی:

$$\tan ۳\theta=۱\Rightarrow ۳\theta=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۱۲}$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی



	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

اتحادهای پایه‌ای مثلثاتی

۱) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

۲) $\left.\begin{array}{l}\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}\end{array}\right\} \Rightarrow \tan x \times \cot x = 1 \quad x \neq \dfrac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

۳) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

۴) $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

ماز

۳- اگر در تابع به فرم $f(x)=a-b\sin\frac{\pi}{c}x$ شروط $max=۴$، $min=-۶$ و دورهٔ تناوب $T=۲$ برقرار باشد، مقدار $a+|bc|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

با استفاده از فرمول‌های دورهٔ تناوب، مینیمم و ماکزیمم داریم:

$$f(x)=a-b\sin\frac{\pi}{c}x \Rightarrow \begin{cases} max = a+|b| = ۴ \\ min = a-|b| = -۶ \\ T = \dfrac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{c}\right|} = ۲ \end{cases}$$

پس:

$$\begin{cases} a+|b|=۴ \\ a-|b|=-۶ \end{cases} \Rightarrow a=-۱\ ,\ |b|=۵$$

$۲|c|=۲\Rightarrow|c|=۱$

درنتیجه:

$a+|bc|=a+|b||c|=-۱+۵=۴$

در باب ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب!

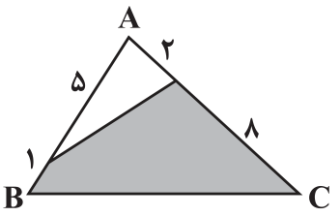
در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ داریم:

$$\left.\begin{matrix}\max=c+|a|\\ \min=c-|a|\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\max-\min=۲|a|\\ \max+\min=۲c\end{cases}$$

دورهٔ تناوب: $T=\dfrac{۲\pi}{|b|}$

ماز

۴- اگر در شکل مقابل مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده برابر ۲۰ باشد، مقدار مثبت $\cos A$ چه عددی است؟



۱) $\frac{۱}{۵}$

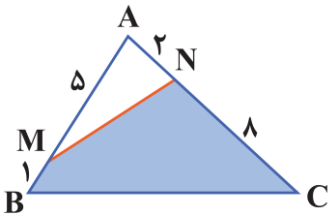
۲) $\frac{۲}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۰۰۲)

مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده از اختلاف مساحت دو مثلث به‌دست می‌آید. پس:



$$S_{\text{سایه‌خورده}}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMN}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times AB.AC\sin A-\frac{۱}{۲}AN.AM\sin A$$

$$S_{\text{سایه‌خورده}}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۱۰\sin A-\frac{۱}{۲}\times۲\times۵\sin A$$

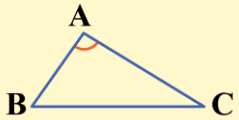
از طرفی با توجه به فرض داریم:

$$S_{\text{سایه‌خورده}}=۲۵\sin A=۲۰\Rightarrow\sin A=\frac{۴}{۵}$$

$$\cos A=\pm\sqrt{۱-\sin^۲A}=\pm\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}\xrightarrow{\cos A>۰}\cos A=+\frac{۳}{۵}$$

مساحت مثلث با مثلثات!

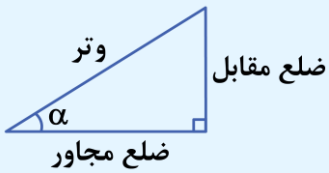
مساحت مثلث ABC که طول دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد برابر است با:



$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

وقتی که فقط یکی از نسبت‌های مثلثاتی را داریم، برای محاسبهٔ اندازهٔ سایر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان با توجه به تعریف آن‌ها، یک مثلث **قائم‌الزاویه** رسم کرد و نسبت معلوم را روی دو ضلع آن نوشت. سپس با استفاده از رابطهٔ **فیثاغورس** طول ضلع دیگر را به‌دست آورد و تمام نسبت‌ها را این گونه مشخص کرد.



$$\sin\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ وتر}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور}}{\text{اندازهٔ ضلع مقابل}}$$

توجه!

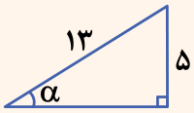
توجه داشته باشید که با روش رسم مثلث فقط اندازهٔ نسبت به‌دست می‌آید و برای تعیین علامت نسبت باید به این‌که انتهای α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد توجه کرد.

یه نمونهٔ باحال ببین!

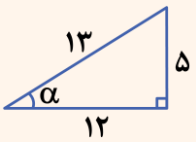
سؤال: اگر $\sin\alpha = -\frac{۵}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویهٔ α به‌دست آورید.

پاسخ تشریحی:

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده و ضلع مقابل را برابر ۵ و وتر را برابر ۱۳ قرار می‌دهیم.



سپس با استفاده از فیثاغورس اندازهٔ ضلع مجاور را به‌دست می‌آوریم:



$$۱۳^۲ - ۵^۲ = ۱۲^۲ \Rightarrow \text{ضلع مجاور} = ۱۲$$

حال می‌توانیم سه نسبت مثلثاتی دیگر را به راحتی به‌دست آوریم، توجه داریم که در ناحیهٔ سوم سینوس و کسینوس منفی و تانژانت و کتانژانت مثبت‌اند.

$$\cos\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳} \qquad \tan\alpha = \frac{۵}{۱۲} \qquad \cot\alpha = \frac{۱۲}{۵}$$

ماز

۵- هر گاه دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\sin\frac{\pi}{۳a}x$ برابر ۴ باشد، دورهٔ تناوب تابع $g(x)=a\cos^۲\frac{\pi a}{۳}x$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۴/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۲)

ابتدا با توجه به فرمول دورهٔ تناوب داریم:

$$f(x)=a\sin\frac{\pi}{۳a}x \Rightarrow T=۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{۳a}\right|}=۴ \Rightarrow ۶|a|=۴ \Rightarrow |a|=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی:

$$g(x)=a\cos^{۲}\frac{\pi a}{۳}x \Rightarrow T=\frac{\pi}{\left|\frac{a\pi}{۳}\right|}=\frac{۳}{|a|}=\frac{۳}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

برد و دورهٔ تناوب توان دوم تابع سینوسی و کسینوسی

- $-۱\le \cos x\le ۱ \Rightarrow ۰\le \cos^{۲} x\le ۱$
- $\begin{cases} y=a\cos(bx)+c \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|} \\ y=a\cos^{۲}(bx)+c \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|} \end{cases}$
- $-۱\le \sin x\le ۱ \Rightarrow ۰\le \sin^{۲} x\le ۱$
- $\begin{cases} y=a\sin(bx)+c \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|} \\ y=a\sin^{۲}(bx)+c \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|} \end{cases}$

۶- مقدار $A=\tan\frac{۱۵\pi}{۴}\cos\frac{۱۴\pi}{۳}-\sin^{۲}\frac{۱۳\pi}{۳}$ چه عددی است؟

۱) $-\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۵}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۰۱ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا هر یک را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\tan(\frac{۱۵\pi}{۴})=\tan(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=\tan(-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cos(\frac{۱۴\pi}{۳})=\cos(۴\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos(\frac{\pi}{۳})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\sin(\frac{۱۳\pi}{۳})=\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$A=(-۱)(-\frac{۱}{۲})-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}-(\frac{۳}{۴})=\frac{۲}{۴}-\frac{۳}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

نسبت‌های مثلثاتی قرینهٔ کمان

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی نسبت‌های مثلثاتی کمان $(-\theta)$ به‌صورت زیر می‌باشند:

۱) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ۲) $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ۳) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$ ۴) $\cot(-\theta)=-\cot\theta$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $۲k\pi\pm\alpha$

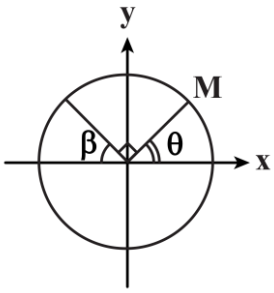
$(۲k\pi+\alpha)$	$(۲k\pi-\alpha)$
$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$
$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$
$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی sin و cos در زوایای $(k\pi\pm\alpha)$ **مضارب زوج** π رو می‌تونیم **حذف** کنیم (k زوج) و برای محاسبهٔ tan و cot حتی **فردها** رو هم می‌تونین **حذف** کنین یعنی کلاً **مضارب صحیح** π حذف می‌شن.

SanjeshCloud

۷- اگر مطابق شکل نقطهٔ $M(\frac{m}{۲},m-۱)$ روی دایرهٔ مثلثاتی واقع شده باشد، مقدار $\tan\beta$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۵}$

۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ ترکیبی/محاسباتی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۸ و حسابان ۱ صفحهٔ ۹۸ ـ ۱۰۰۲ و ۱۱۰۴)

اولاً چون M روی دایرهٔ مثلثاتی است، داریم:

$$M\begin{cases}\frac{m}{۲}=\cos\theta\\ m-۱=\sin\theta\end{cases}$$

پس:

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow\frac{m^۲}{۴}+m^۲-۲m+۱=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۴}m^۲-۲m=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\ \text{غ ق ق}\\ m=\frac{۸}{۵}\end{cases}$$

یعنی:

$$M\begin{cases}\frac{۴}{۵}=\cos\theta\\ \frac{۳}{۵}=\sin\theta\end{cases}$$

دقت کنید:

$$\beta+\frac{\pi}{۲}+\theta=\pi\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{۲}-\theta$$

چون β و θ **متمم** یکدیگرند:

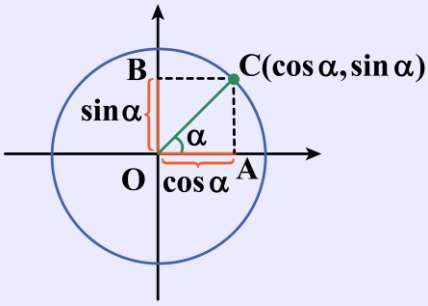
$$\tan\beta=\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}$$

راهنمای زرنگ‌بازی!

تکنیک متمم را به خاطر بسپارید:

$$\alpha\text{ و }\beta\text{ دو زاویهٔ متمم هستند}\Rightarrow\alpha+\beta=۹۰^\circ\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\cos\beta & \tan\alpha=\cot\beta\\ \cos\alpha=\sin\beta & \cot\alpha=\tan\beta\end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی روی دایرهٔ مثلثاتی



$$\begin{cases}\cos\alpha = OA\\ \sin\alpha = OB\end{cases}$$

تذکر!

شعاع دایرهٔ مثلثاتی **یک واحد** است.

۸- در تابع $f(x)=\frac{۵}{۲}-a\cos\frac{۲\pi}{۳}x$ اختلاف بیشترین و کمترین مقدار آن برابر دورهٔ تناوب تابع است. بیشترین مقدار تابع چه عددی است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۳ ۳) ۴/۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع را می‌یابیم:

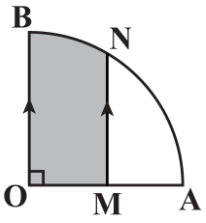
$$\begin{cases}\max = \frac{۵}{۲}+|a|\\ \min = \frac{۵}{۲}-|a|\end{cases} \Rightarrow \max-\min = ۲|a|$$

حال دورهٔ تناوب تابع را می‌یابیم و برابر با اختلاف به‌دست‌آمده قرار می‌دهیم:

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=۳ \Rightarrow ۲|a|=۳ \Rightarrow |a|=\frac{۳}{۲}$$

$$\max=\frac{۵}{۲}+|a|=\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}=۴$$

۹- در ربع دایرهٔ شکل مقابل، نقطهٔ M وسط شعاع OA قرار گرفته است و $MN \| OB$. اگر طول کمان AN برابر π باشد، مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده چه عددی است؟

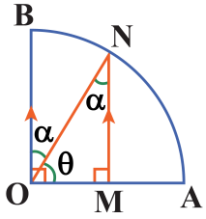


۱) $\frac{۳\sqrt{۳}+۲\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}+۶\pi}{۸}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۳}+\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۳}+۶\pi}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹۴ ـ ۱۱۰۴)

در مثلث **قائم‌الزاویهٔ** OMN داریم:



$$ON=R \ , \ OM=\frac{R}{۲} \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

پس از آنجا که **جمع زوایای داخلی** مثلث ۱۸۰° است:

$$\theta = ۶۰^\circ$$

$$\text{طول } \overset{\frown}{AN} = R.\theta \Rightarrow \pi = R \times \frac{\pi}{۳} \Rightarrow R = ۳$$

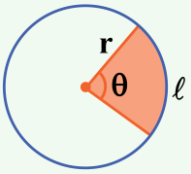
برای یافتن مساحت قسمت سایه‌خورده داریم:

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = S_{\text{قطاع}} + S_{\underset{OMN}{\triangle}} \Rightarrow S_{\text{سایه‌خورده}} = \frac{۱}{۲}OM.ON\sin\theta + \frac{۱}{۲}R^۲\frac{\pi}{۶}$$

$$S_{\text{سایه‌خورده}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}\times۹\times\frac{\pi}{۶} = \frac{۹}{۸}\sqrt{۳} + \frac{۳\pi}{۴} = \frac{۹\sqrt{۳}+۶\pi}{۸}$$

طول کمان

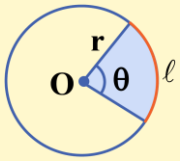
همواره بین اندازهٔ یک زاویهٔ مانند θ برحسب رادیان و طول کمان روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r یعنی ℓ رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\ell = r\theta$$

مساحت قطاع

مساحت قطاعی از دایره به شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ رادیان برابر است با:



$$S = \frac{۱}{۲}r^۲\theta$$

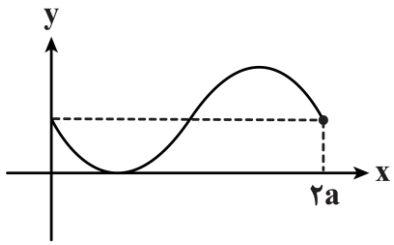
راهنمای زرنگ‌بازی!

با نسبت تناسب هم می‌تونستین مساحت قطاع رو حساب کنین.

$$\frac{\pi R^۲ \mid S}{۳۶۰^\circ \mid ۳۰^\circ} \Rightarrow S = \frac{۳۰}{۳۶۰}\times\pi R^۲ = \frac{۱}{۱۲}\times\pi\times۹ = \frac{۳\pi}{۴}$$

ماز

۱۰- اگر نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = ۲a + ۴\sin\frac{b}{۲}x$ باشد، مقدار ab چه عددی است؟



۱) -۴π
۲) ۴π
۳) -۲π
۴) ۲π

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۲)

$$Min = ۰ \Rightarrow ۲a - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

$$T = ۲a \xrightarrow{a=۲} T = ۴ \Rightarrow \frac{۲\pi}{\left|\frac{b}{۲}\right|} = ۴ \Rightarrow |b| = \pi$$

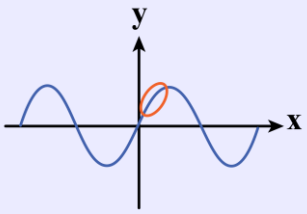
اما با توجه به شکل $b < ۰$ پس $b = -\pi$. درنتیجه $ab = -۲\pi$.

نمودارشناسی در توابع سینوسی و کسینوسی

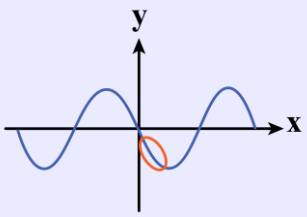
دربارهٔ علامت a و b:

$f(x)=a\sin(bx)+c \Leftarrow$

- a و b هم‌علامت هستند $\Leftrightarrow$ در سمت راست $x=0$ تابع صعودی می‌باشد.

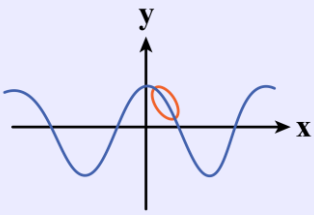


- a و b غیرهم‌علامت هستند $\Leftrightarrow$ در سمت راست $x=0$ تابع نزولی می‌باشد.

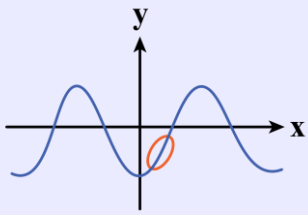


$f(x)=a\cos(bx)+c \Leftarrow$

- $a>0$ (علامت b تاثیر ندارد) $\Leftrightarrow$ در سمت راست $x=0$ تابع نزولی می‌باشد.



- $a<0$ (علامت b تاثیر ندارد) $\Leftrightarrow$ در سمت راست $x=0$ تابع صعودی می‌باشد.



توجه!

جابه‌جایی روی محور x وجود ندارد.

ماز

۱۱- هر گاه $\frac{-2\pi}{9}<x<\frac{\pi}{18}$ باشد، به‌طوری که $\sin(\frac{\pi}{3}-3x)=\frac{1-3m}{4}$ حدود m کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ۲) $[-1,-\frac{1}{2})$ ۳) $[-1,\frac{1}{3})$ ۴) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$

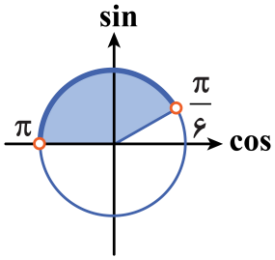
پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹۵ ـ ۱۱۰۴)

ابتدا حدود کمان sin را می‌یابیم:

$$\frac{-2\pi}{9}<x<\frac{\pi}{18}\Rightarrow\frac{-2\pi}{3}<3x<\frac{\pi}{6}\Rightarrow-\frac{\pi}{6}<-3x<\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}-3x<\pi$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$0<\sin(\frac{\pi}{3}-3x)\leq 1$$

پس بنا به فرض داریم:

$$۰<\frac{۱-۳m}{۴}\leq ۱ \Rightarrow ۰<۱-۳m\leq ۴$$

$$\Rightarrow -۴\leq ۳m-۱<۰ \Rightarrow -۳\leq ۳m<۱ \xrightarrow{\div ۳} -۱\leq m<\frac{۱}{۳} \Rightarrow m\in[-۱,\frac{۱}{۳})$$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

اگر حدود یک کمان داده شده باشد و حدود نسبت مثلثاتی رو بخواد ناحیهٔ مربوط به اون کمان رو روی دایرهٔ مثلثاتی پیدا می‌کنیم و **روی محور** sin یا cos **تصویر** می‌کنیم تا حدود sin و cos به‌دست بیاد.

۱۲- با فرض آنکه $\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{۶}+x)$ کدام است؟

۱) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\pm۲\sqrt{۲}$ ۴) $\pm\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ ترکیبی ـ سریع ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۹۸ ـ ۱۱۰۴)

$$\cos(\frac{\pi}{۳}-x)=\frac{۱}{۳}$$

$$۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۳}-x)=\frac{۱}{\cos^۲(\frac{\pi}{۳}-x)}=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}}=۹$$

$$\Rightarrow \tan^۲(\frac{\pi}{۳}-x)=۸ \xrightarrow{\text{جذر}} \tan(\frac{\pi}{۳}-x)=\pm۲\sqrt{۲}$$

بنابراین:

$$\tan(\frac{\pi}{۶}+x)=\tan(\frac{\pi}{۲}-(\frac{\pi}{۳}-x))=\cot(\frac{\pi}{۳}-x)=\frac{۱}{\tan(\frac{\pi}{۳}-x)}=\pm\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

نسبت‌های مثلثاتی مجموع یا تفاضل زوایا با زاویهٔ ۹۰ درجه

اگر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را داشته باشیم، آن‌گاه:

۱) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$ ، $\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha$ ، $\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$

۲) $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ ، $\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$ ، $\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan\alpha$

SanjeshCloud

۱۳- هر گاه $\tan ۲۰^\circ \simeq ۰/۳۶$ باشد، مقدار $A=\frac{۲\cos ۲۵۰^\circ - ۳\sin ۱۶۰^\circ}{۲\sin ۲۹۰^\circ - \cos ۱۱۰^\circ}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۹۳}{۴۱}$ ۲) $\frac{۴۵}{۴۱}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲۱}$ ۴) $\frac{۹۱}{۸۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۱ صفحهٔ ۱۰۳ ـ ۱۱۰۴)

در ابتدا تمام نسبت‌ها را برحسب نسبت‌های زاویهٔ ۲۰° می‌نویسیم:

$$A=\frac{۲\cos(\overbrace{۲۷۰^\circ - ۲۰^\circ}^{\text{ربع سوم}}) - ۳\sin(\overbrace{۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ}^{\text{ربع دوم}})}{۲\sin(\underbrace{۲۷۰^\circ + ۲۰^\circ}_{\text{ربع چهارم}}) - \cos(\underbrace{۹۰^\circ + ۲۰^\circ}_{\text{ربع دوم}})} \Rightarrow A=\frac{-۲\sin ۲۰^\circ - ۳\sin ۲۰^\circ}{-۲\cos ۲۰^\circ + \sin ۲۰^\circ}$$

حال **صورت و مخرج** را بر $\cos ۲۰^\circ$ **تقسیم** می‌کنیم:

$$A=\frac{-۵\tan ۲۰^\circ}{-۲+\tan ۲۰^\circ} \simeq \frac{-۵\times ۰/۳۶}{۰/۳۶-۲}=\frac{۱/۸}{۱/۶۴}=\frac{۱۸۰}{۱۶۴} \Rightarrow A=\frac{۴۵}{۴۱}$$

قِلِقِش رو یاد بگیر!

برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های $(۹۰^\circ \pm \alpha)$ و $(۱۸۰^\circ \pm \alpha)$ و $(۲۷۰^\circ \pm \alpha)$ و $(۳۶۰^\circ \pm \alpha)$ ابتدا باید ببینیم کمان موردنظر در کدام **ناحیهٔ مثلثاتی** است (α را در حالت کلی حاده در نظر می‌گیریم)، با این کار علامت نسبت مثلثاتی به‌دست می‌آید. در ادامه، اگر کمان $(۱۸۰^\circ \pm \alpha)$ یا $(۳۶۰^\circ \pm \alpha)$ باشد نسبت مثلثاتی عوض نمی‌شود اما در کمان‌های $(۹۰^\circ \pm \alpha)$ یا $(۲۷۰^\circ \pm \alpha)$ نسبت‌ها عوض می‌شوند.

$\sin \Leftrightarrow \cos$ $\tan \Leftrightarrow \cot$

۱۴- تابع $f(x)=۳\sin(\frac{\pi}{۳}+۴x)$ در بازهٔ $(\alpha, \frac{\pi}{۲۴})$ یکنوای اکید است. حداکثر مقدار α و نوع یکنوایی کدام است؟

۱) $\frac{۷\pi}{۲۴}$ و نزولی اکید ۲) $\frac{\pi}{۴}$ و صعودی اکید

۳) $\frac{۷\pi}{۲۴}$ و صعودی اکید ۴) $\frac{\pi}{۴}$ و نزولی اکید

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۲)

اولاً $f(\frac{\pi}{۲۴})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\frac{\pi}{۲۴})=۳\sin(\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶})=۳\sin(\frac{\pi}{۲})=۳\times ۱=۳$$

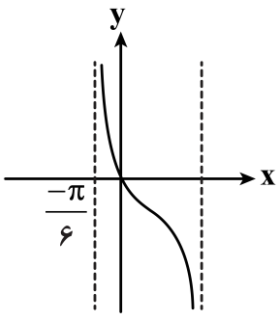
یعنی تابع در Max مقدار خودش واقع شده است پس حتماً در ادامه یک روند **نزولی** را طی خواهد کرد پس تابع نزولی اکید است.

ثانیاً در ادامه و با حرکت به سمت راست چون تابع در ابتدای بازه در Max مقدار خودش قرار دارد در **نصف دورهٔ تناوب** نزولی اکید خواهد بود، و چون $T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\max \alpha=\frac{\pi}{۲۴}+\frac{T}{۲}=\frac{\pi}{۲۴}+\frac{\pi}{۴}=\frac{۷\pi}{۲۴}$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۵- بخشی از نمودار $f(x)=a-۲\tan(bx-\frac{\pi}{۴})$ مطابق شکل مقابل است. مقدار **ab** چه عددی است؟



۱) ۶
۲) -۶
۳) ۳
۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۲۰۲)

تابع داده‌شده از تبدیل نمودار $\tan x$ به‌دست آمده و از **مبدأ مختصات** عبور کرده است، پس:

$$f(۰)=۰ \Rightarrow a-۲\tan(-\frac{\pi}{۴})=۰ \Rightarrow a+۲=۰ \Rightarrow a=-۲$$

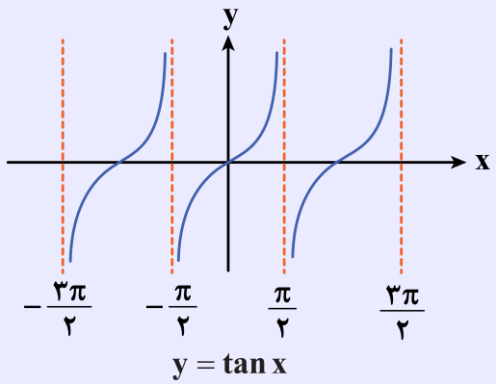
چون تابع $y=\tan x$ در هر بازه‌ای که **تعریف شده** باشد **صعودی اکید** است و این تابع **نزولی اکید** شده است، پس با توجه به علامت منفی پشت tan، $b>۰$ است، از طرفی با توجه به آنکه $\frac{-\pi}{۶}$ نزدیک‌ترین مجانب به محور عرض‌هاست، پس:

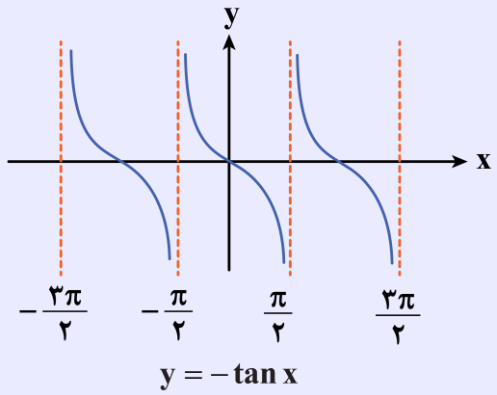
$$b(\frac{-\pi}{۶})-\frac{\pi}{۴}=-\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{-b\pi}{۶}=-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow b=\frac{۳}{۲}$$

پس:

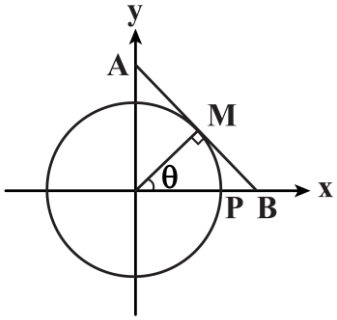
$$ab=-۲\times\frac{۳}{۲}=-۳$$

توابع $y=\tan x$ و $y=-\tan x$





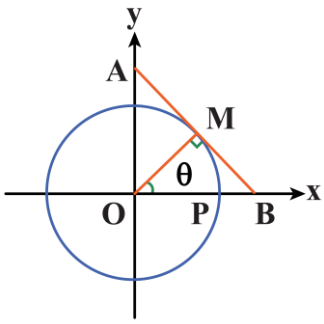
۱۶- خط **AB** بر دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ **M** مماس است. اگر عرض نقطهٔ **M** برابر $\frac{۱}{۳}\tan\theta$ باشد، مقدار **BP** چه عددی است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ ریاضی ۱ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)

چون M روی دایرهٔ مثلثاتی در انتهای کمان θ واقع شده است، پس:



$$M\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix} \Rightarrow y_M = \sin\theta = \frac{۱}{۳}\tan\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱}{۳}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \xrightarrow{\div \sin\theta} ۳\cos\theta = ۱ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۳}$$

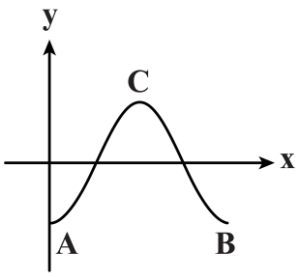
اما می‌دانیم:

$$\overset{\triangle}{OMB}: \cos\theta = \frac{OM}{OB} = \frac{۱}{OB} \Rightarrow OB = \frac{۱}{\cos\theta}$$

$$PB = OB - ۱ = \frac{۱}{\cos\theta} - ۱ = ۳ - ۱ = ۲$$

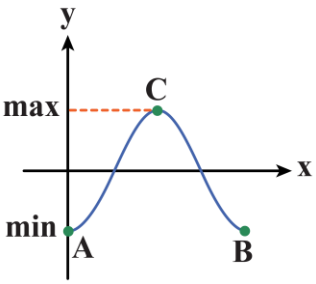
۱۷- نمودار $f(x) = ۱ - ۳\cos\frac{\pi}{۴}x$ در یک دورهٔ تناوب مطابق شکل مقابل است. مساحت مثلثی با رئوس A، B و C چه عددی است؟

۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۳۰



پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۲۰۲)

در ابتدا با توجه به نمودار داریم:



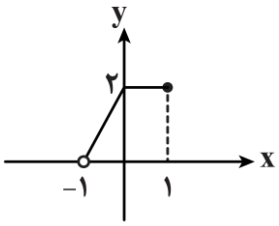
$$\begin{cases}\max = ۱ + ۳ = ۴\\ \min = ۱ - ۳ = -۲\end{cases} \Rightarrow \text{ارتفاع مثلث} = ۶$$

$$AB = T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}} = ۸ \Rightarrow \text{قاعده مثلث} = ۸$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۲۴$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸- اگر شکل مقابل قسمتی از نمودار f باشد به‌طوری که برای هر مقدار حقیقی x از دامنه $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$ باشد، مقدار $f(21/5)-2f(-11/5)$ چه عددی است؟



۱) -3
۲) -2
۳) -5
۴) -4

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۲)

اولاً داریم:

$$f(x+4)=f(x+2+2)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$$

یعنی $f(x+4)=f(x)$ پس **دورهٔ تناوب** f برابر $T=4$ است.

$$f(21/5)=f(\underbrace{20}_{\text{مضرب ۴}}+1/5)=f(1/5)=f(2+(-\frac{1}{2}))=\frac{-1}{f(-\frac{1}{2})}$$

اما ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x\le 1\\ 2x+2 & -1<x\le 0\end{cases}$ است. پس:

$$f(-\frac{1}{2})=1$$

پس تا اینجا $f(21/5)=-1$. از طرفی:

$$f(-11/5)=f(-12+\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=2$$

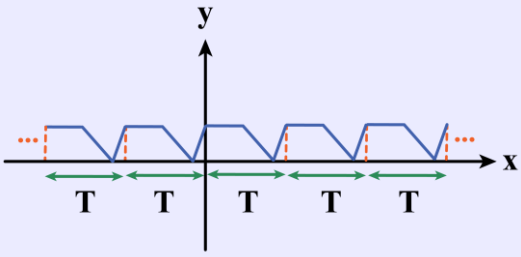
پس:

$$f(21/5)-2f(-11/5)=-1-2\times 2=-5$$

دورهٔ تناوب

تابع f با دامنهٔ D_f را در نظر بگیرید. اگر **عدد حقیقی مثبتی** مانند T وجود داشته باشد که به‌ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $(x\pm T)\in D_f$ و:

$$f(x\pm T)=f(x)$$

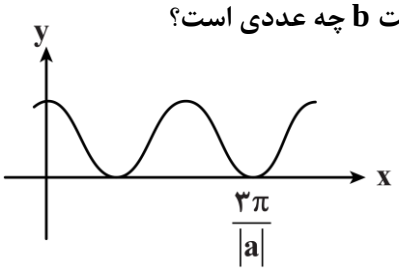


آن‌گاه می‌گوییم f تابعی **متناوب** است. **کوچک‌ترین عدد** T با ویژگی مذکور **«دورهٔ تناوب»** تابع متناوب f نامیده می‌شود.

به زبان ساده، اگر به هر نقطه با طول x، T را اضافه و یا از آن T را کم کنیم، نقطه‌ای **هم‌عرض** با نقطهٔ اولیه به‌دست می‌آید.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹- بخشی از نمودار تابع $f(x)=۴-a-۲a\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{b}{۲}x)$ مطابق شکل مقابل است. مقدار مثبت b چه عددی است؟



۱) ۸
۲) ۴
۳) ۲
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha$ است، پس: $f(x)=۴-a-۲a\cos(\frac{b}{۲}x)$

با توجه به نمودار چون در شروع از صفر به سمت xهای مثبت نمودار **نزولی** است، پس ضریب cos یعنی $(-۲a)$ باید **مثبت** باشد درنتیجه $a<۰$ است، پس:

$$\min=۴-a-۲|a|=۰\xrightarrow{a<۰}۴-a+۲a=۰\Rightarrow a=-۴$$

به این ترتیب:

$$f(x)=۸+۸\cos(\frac{b}{۲}x)$$

توجه کنید که به‌ازای $x=۰$، $f(۰)$ **ماکزیمم** مقدار خود را اختیار می‌کند.

با توجه به **دورهٔ تناوب** تابع داریم:

$$\frac{۳}{۲}T=\frac{۳\pi}{|a|}\Rightarrow\frac{۳}{۲}T=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

از طرفی با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{b}{۲}|}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{۴\pi}{b}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow b=۸$$

۲۰- هرگاه بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{۱۲}{۴-۲k\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)}$ برابر ۶ باشد، حداقل مقدار آن چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۲)

اولاً **مخرج نمی‌تواند ریشه داشته باشد**، زیرا در آن صورت حداقل و یا حداکثر مقدار برای تابع بی‌معنا می‌شد.

ثانیاً

$$\frac{۱۲}{۴-۲k\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)}\le۶$$

$$\xrightarrow{\div۱۲}\frac{۱}{۴-۲k\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)}\le\frac{۱}{۲}\xrightarrow[\text{مخرج‌ها}]{\text{به‌شرط مثبت بودن}}۴-۲k\sin(\frac{\pi}{۳}-۲x)\ge۲$$

SanjeshCloud

یعنی **حداقل مقدار مخرج تابع** $y = ۴ - ۲k\sin(\frac{\pi}{۳} - ۲x)$ برابر با ۲ است، پس:

$$۴ - ۲|k| = ۲ \Rightarrow ۲|k| = ۲ \Rightarrow |k| = ۱$$

پس $k = ۱$ یا $k = -۱$ در این صورت:

$$y = ۴ \pm ۲\sin(\frac{\pi}{۳} - ۲x) \Rightarrow \begin{cases} \max = ۶ \\ \min = ۲ \end{cases}$$

$$۲ \le y \le ۶ \Rightarrow \frac{۱}{۶} \le \frac{۱}{y} \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲ \le \frac{۱۲}{y} \le ۶$$

$$\Rightarrow ۲ \le f(x) \le ۶$$

حداقل مقدار f برابر با ۲ و حداکثر مقدار آن برابر با ۶ است.

ماز

سلام به مازی‌های عزیز

سرفصل **هندسهٔ** این آزمون از دو بخش تشکیل شده است.

۱ـ هندسه ۳: با **حل دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول** و یا حتی بیشتر در سنوات قبل آشنا شدید ولی در این سرفصل یادگیری حل آن‌ها **با استفاده از ماتریس**، جذابیت خاص خودش را دارد که معمولاً در **امتحان نهایی** به آن توجه ویژه می‌شود.

سهم سرفصل حاضر در کنکور و امتحان نهایی در جدول زیر آمده است:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
ماتریس و کاربردها	۲ تست	۶ نمره
سرفصل حاضر	حداکثر ۱ تست	۱ نمره

۲ـ هندسه پایه: قسمت اول از «**تشابه**» و «**قضیهٔ تالس**» در آزمون قبل مطرح شد و به ادامهٔ آن در این سرفصل پرداخته شده است. به نوعی می‌توان گفت حل مسائل هندسه بدون استفاده از تشابه و تالس معنایی ندارد و حتی اگر سؤال مستقیمی از این مباحث طرح نشود ممکن است در حل سؤال‌های دیگری به کار روند.

سرفصل حاضر از **گسسته** هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور اهمیت ویژه‌ای دارد:

سؤالاتی که از «**ب.م.م و ک.م.م**» در امتحان نهایی داده می‌شوند دشواری چندانی ندارند، ولی بعضاً در کنکور سؤالات نسبتاً دشواری داده می‌شود. سؤالات مبحث «**قضیهٔ تقسیم**» نیز در امتحان نهایی ساده‌اند و اغلب سؤالات این قسمت در کنکور را یا از طریق **هم‌نهشتی** و یا با **امتحان کردن گزینه‌ها** می‌توان حل کرد. از «**مقدمات هم‌نهشتی**» هم در امتحان نهایی و هم در کنکور سؤالات متعدد و ساده‌ای مطرح می‌کنند.

سهم این سرفصل در کنکور و امتحان نهایی در جدول زیر آمده است:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
آشنایی با نظریهٔ اعداد	۲ تست	۷ نمره
سرفصل حاضر	۱ تست	۳ نمره

موفق باشید.

رسول حاجی‌زاده ـ مسئول درس هندسه، گسسته و آمار آزمون‌های تستی ماز

۲۱- اگر $B=\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $BAB^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، تعداد جواب‌های دستگاه معادلات $A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ a+۱\end{bmatrix}$ چگونه است؟

۱) یک جواب منحصر به فرد دارد.
۲) جواب ندارد.
۳) بی‌شمار جواب دارد.
۴) بستگی به مقدار a دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۴۰۱)

ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم، کافیست طرفین تساوی را **از چپ** در $B^{-۱}$ و **از راست** در B ضرب کنیم:

$$BAB^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow A=B^{-۱}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}B$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱}{۸-۷}\begin{bmatrix}۲ & -۷\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۷\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & -۷\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸ & ۱۴\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}-۵ & -۱۴\\ ۴ & ۱۰\end{bmatrix}$$

حال چون $\frac{-۵}{۴}\neq\frac{-۱۴}{۱۰}$ دستگاه $\begin{bmatrix}-۵ & -۱۴\\ ۴ & ۱۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ a+۱\end{bmatrix}$ یک جواب منحصر به فرد دارد.

تعداد جواب‌های دستگاه معادلات دو معادله دو مجهولی

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ که به فرم ماتریسی با دستگاه $\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\\ c'\end{bmatrix}$ نشان داده می‌شود را درنظر بگیرید، برای جواب‌های آن ۳ حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

۱) اگر $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ باشد، دستگاه **یک جواب منحصر به فرد** به فرم $(x_۰,y_۰)$ دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه دارای **بی‌شمار** جواب می‌باشد.

۳) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه **دارای جواب نمی‌باشد**.

توجه!

در هنگام چم شروط بالا باید دقت داشت که مخرج صفر نشود، در این صورت باید معادلات مستقیماً بررسی شوند.

یافتن ماتریس مجهول

برای به‌دست‌آوردن ماتریس X از تساوی ماتریسی $AXB=C$ کافی است $A^{-۱}$ را از چپ و $B^{-۱}$ را از راست در طرفین تساوی ضرب کنیم.

$$AXB=C\Rightarrow \underbrace{A^{-۱}A}_{I}X\underbrace{BB^{-۱}}_{I}=A^{-۱}CB^{-۱}\Rightarrow X=A^{-۱}CB^{-۱}$$

۲۲- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & a & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ a & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، دستگاه معادلات $(AB)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ به ازای چه مقادیری از a و b جوابی منحصر به فرد دارد؟

۱) $a=۲$ و $b\in\mathbb{R}$
۲) $a=-۲$ و $b=۴$
۳) $a,b\in\mathbb{R}$
۴) $a\in\mathbb{R}$ و $b=۴$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس AB را به دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & a & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ a & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+۱ & ۳a-۲\\ ۳a-۲ & ۱۴\end{bmatrix}$$

حال دترمینان ماتریس AB را به دست می‌آوریم:

$$|AB|=۱۴(a^۲+۱)-(۳a-۲)^۲=(۱۴a^۲+۱۴)-(۹a^۲-۱۲a+۴)=۵a^۲+۱۲a+۱۰$$

$$\Delta=۱۲^۲-۴\times۱۰\times۵<۰$$

چون **ضریب** $a^۲$ **مثبت** و $\Delta<۰$ است، عبارت $|AB|$ **همواره مثبت** است، یعنی هرگز صفر نمی‌شود، بنابراین دستگاه همواره دارای جواب منحصر به فرد است. یعنی به‌ازای هر $a,b\in\mathbb{R}$، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۲۳- **اگر دستگاه معادلات** $\begin{bmatrix}\log(a+۲) & \log(۲a+۳)\\ \log(۲a+۳) & \log(a+۲)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ **فاقد جواب باشد، برای a چند جواب وجود دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

$$A=\begin{bmatrix}\log(a+۲) & \log(۲a+۳)\\ \log(۲a+۳) & \log(a+۲)\end{bmatrix}$$

باید $|A|=۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$\big(\log(a+۲)\big)^۲-\big(\log(۲a+۳)\big)^۲=۰\Rightarrow\log(a+۲)=\pm\log(۲a+۳)$$

۱) $\log(a+۲)=\log(۲a+۳)\Rightarrow a+۲=۲a+۳\Rightarrow a=-۱$ ✓

۲) $\log(a+۲)=-\log(۲a+۳)\Rightarrow\log(a+۲)=\log\frac{۱}{۲a+۳}\Rightarrow a+۲=\frac{۱}{۲a+۳}\Rightarrow ۲a^۲+۷a+۶=۱$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۷a+۵=۰\xrightarrow{\Delta=۴۹-۴۰=۹}a=\frac{-۷\pm۳}{۴}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{۵}{۲}\ \text{غ ق ق}\\ a=-۱\ ✓\end{cases}$$

توجه کنید که به‌ازای $a=-\frac{۵}{۲}$ عبارت جلوی لگاریتم **منفی** می‌شود و غیرقابل قبول است.

پس تنها به‌ازای ۱ مقدار $a=-۱$ دستگاه جواب ندارد.

۲۴- **اگر دستگاه** $\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & a-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}$ **دارای جواب غیرصفر باشد، دستگاه معادلات** $\begin{bmatrix}a & ۱\\ ۳ & ۲a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ **چگونه است؟**

۱) جواب ندارد.
۲) جواب منحصر به فرد دارد که در آن $x<y$.
۳) بی‌شمار جواب دارد.
۴) جواب منحصر به فرد دارد که در آن $x\geq y$.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

وقتی گفته می‌شود دستگاه $AX=\bar{O}$ جواب **غیرصفر** دارد، یعنی خطوط موجود در دستگاه (که هر دو در این حالت از **مبدأ می‌گذرند**) بر هم **منطبق‌اند**، بنابراین:

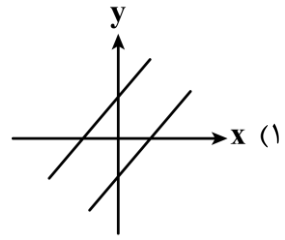
$$\frac{۲}{۳}=\frac{-۱}{a-۱}\Rightarrow ۲a-۲=-۳\Rightarrow ۲a=-۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

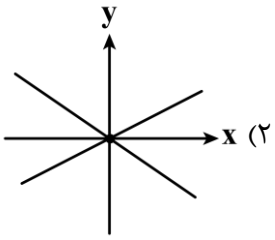
حال دستگاه دوم به صورت $\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ می‌شود که $\frac{-\frac{۱}{۲}}{۳}\neq\frac{۱}{-۱}$ می‌باشد، و با حل دستگاه به جواب $(x,y)=(\frac{۶}{۵},\frac{۱۳}{۵})$ می‌رسیم، بنابراین این دستگاه جواب منحصر به فرد دارد که در آن $x<y$.

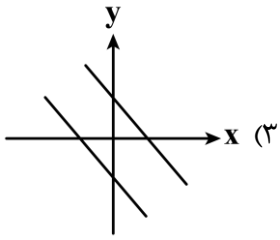
قِلِقِش رو یاد بگیر!

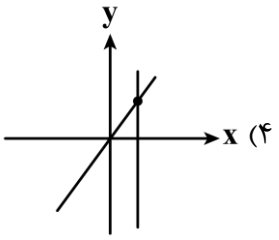
در دستگاه $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ خطوط $ax+by=۰$ و $cx+dy=۰$ هر دو از **مبدأ مختصات** می‌گذرند یعنی چنین دستگاه‌هایی همواره **یک جواب صفر** را دارند، اما در حالت خاصی که $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد یا به عبارتی **دترمینان ماتریس ضرایب** دستگاه **صفر** باشد دو خط بر هم **منطبق** شده و علاوه بر مبدأ در نقاط دیگری نیز اشتراک پیدا می‌کنند که در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود **دستگاه جواب غیرصفر دارد.**

۲۵- شکل مناسب برای تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\bar{O}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

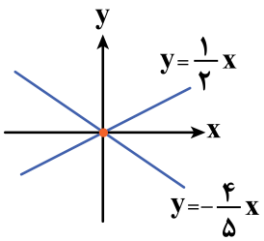
چون در دستگاه داده شده طرف دوم صفر است، پس هر دو خط از **مبدأ می‌گذرند** و چون $\frac{۴}{-۱}\neq\frac{۵}{۲}$ می‌باشد، پس دو خط در مبدأ **متقاطع‌اند** یعنی گزینهٔ «۲» جواب است.

روش دوم

با توجه به رابطهٔ ماتریسی داده شده، به دستگاه معادلات مقابل می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۴x+۵y=۰ \\ -x+۲y=۰ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-\frac{۴}{۵}x \\ y=\frac{۱}{۲}x \end{cases}$$

رسم شکل



۲۶- مثلثی به اضلاع ۱۲، ۹ و b با بیشترین محیط ممکن با مثلثی به اضلاع ۴، ۶ و a متشابه است. محیط مثلث بزرگ‌تر در این حالت کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۴/۵ ۳) ۳۹ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۲)

باید تناسب را طوری بنویسیم که b **بیشترین** مقدار ممکن به دست آید، بنابراین ابتدا اعداد $۹<۱۲<b$ را در صورت کسرها می‌نویسیم:

$$\frac{b}{\bigcirc}=\frac{۱۲}{\bigcirc}=\frac{۹}{\bigcirc}$$

برای اضلاع مثلث دوم سه حالت داریم:

$$\begin{cases} a > ۶ > ۴ \\ ۶ > a > ۴ \\ ۶ > ۴ > a \end{cases}$$

پس داریم:

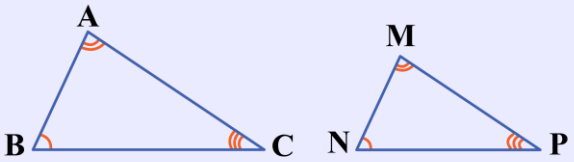
$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{۱۲}{۶} = \frac{۹}{۴} \Rightarrow ۲ \neq \frac{۹}{۴} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \\ \frac{b}{۶} = \frac{۱۲}{a} = \frac{۹}{۴} \Rightarrow b = \frac{۶ \times ۹}{۴} = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳/۵ \\ \frac{b}{۶} = \frac{۱۲}{۴} = \frac{۹}{a} \Rightarrow b = \frac{۶ \times ۱۲}{۴} = ۱۸ \end{cases}$$

بنابراین در حالتی که اضلاع مثلث اول ۱۸،۱۲،۹ و اضلاع مثلث دوم ۶،۴،۳ به دست می‌آید، **محیط مثلث بزرگ‌تر** برابر است با:

$$\text{محیط} = ۱۸ + ۱۲ + ۹ = ۳۹$$

تشابه مثلث‌ها

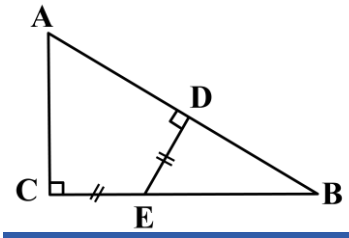
مثلث‌های ABC و MNP را متشابه می‌گوییم هرگاه **نسبت اضلاع آن‌ها با هم برابر** و **زاویه‌های آن‌ها** نیز **دوبه‌دو برابر** باشند.



$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = k \\ \hat{A} = \hat{M}, \hat{B} = \hat{N}, \hat{C} = \hat{P} \end{cases}$$

نسبت اضلاع دو مثلث را **نسبت تشابه** می‌گوییم و آن را با k نشان می‌دهیم.

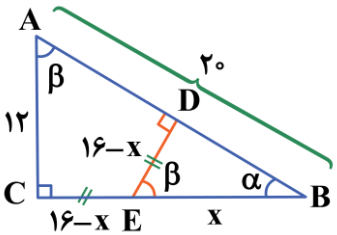
۲۷- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مطابق شکل، AC = ۱۲ و BC = ۱۶ می‌باشد. اگر DE = EC باشد، اندازهٔ پاره‌خط BE کدام است؟



۱) ۱۱
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۰۰۲)

مثلث ABC **قائم‌الزاویه** است، بنابراین طبق **فیثاغورس** داریم:



$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ = ۱۲^۲ + ۱۶^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow AB = ۲۰$$

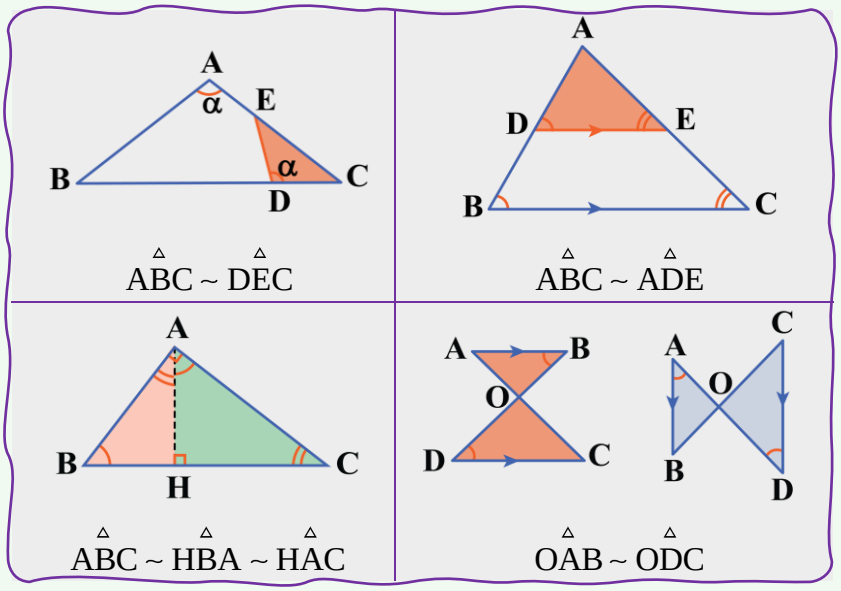
$$BE = x \Rightarrow DE = CE = ۱۶ - x$$

حال دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و BDE با یک زاویهٔ حادهٔ مشترک ($\hat{B}$) **متشابه‌اند**، بنابراین داریم:

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{۱۶ - x}{۱۲} = \frac{x}{۲۰} \Rightarrow ۸۰ - ۵x = ۳x \Rightarrow ۸x = ۸۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

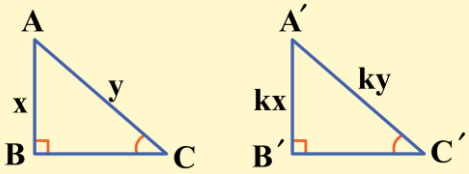
مدل‌های معروف تشابه مثلث‌ها

این ۴ مدل شکل در تشابه مثلث‌ها، خیلی پرتکرارن.



حالت‌های تشابه مثلث‌های قائم‌الزاویه

۱) تساوی یک زاویهٔ حاده:



$$\hat{C} = \hat{C}' \xrightarrow{\hat{B}=\hat{B}'=90^\circ} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

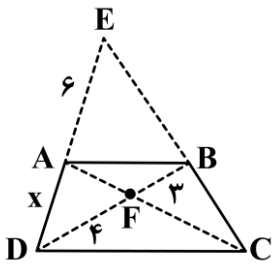
۲) تناسب دو ضلع:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{(دو ضلع قائمه)}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{(وتر و یک ضلع)}$$

ماز

۲۸- در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل قطر BD توسط قطر AC به دو قسمت با اندازه‌های ۳ و ۴ تقسیم شده است و امتداد ساق‌ها در نقطهٔ E به فاصلهٔ ۶ واحد از رأس A متقاطع‌اند. اندازهٔ ساق AD کدام است؟

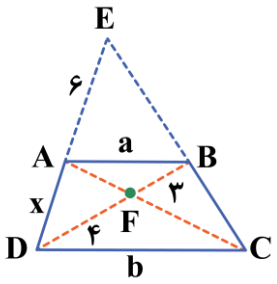


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۰۰۲)

طبق **قضیهٔ اساسی تشابه** دو مثلث $\triangle ABF$ و $\triangle FDC$ **متشابه‌اند.**

بنابراین داریم:



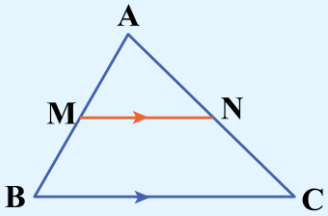
$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\ (*)$$

حال طبق **تعمیم قضیهٔ تالس** در مثلث EDC داریم:

$$\frac{EA}{ED}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{۶}{۶+x}=\frac{a}{b}\xrightarrow{(*)}\frac{۶}{۶+x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow ۱۸+۳x=۲۴\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x=۲$$

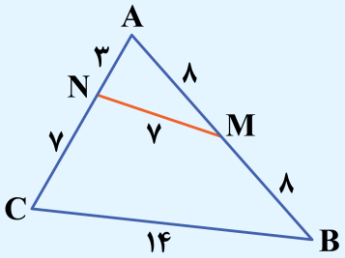
تعمیم قضیهٔ تالس

در مثلث ABC وقتی MN موازی BC باشد، خواهیم داشت:

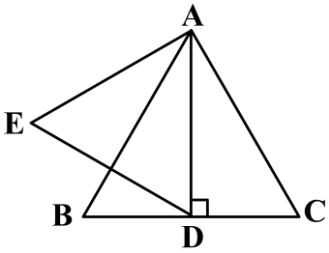


$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

ولی عکس تعمیم قضیهٔ تالس لزوماً برقرار نیست. یعنی از تناسب $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $MN\|BC$ است. به عنوان مثال نقض در شکل زیر $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۲}$ ولی MN موازی BC نیست.



۲۹- در شکل مقابل، مثلث‌های ABC و ADE هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نسبت مساحت $\overset{\triangle}{ADE}$ به مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۰۰۲)

می‌دانیم هر دو مثلث **متساوی‌الاضلاع** دلخواه $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ADE}$ متشابه‌اند، بنابراین از طرفی می‌دانیم **ارتفاع** مثلث متساوی‌الاضلاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ **ضلع** آن است، بنابراین در این دو مثلث متشابه اگر ضلع $\overset{\triangle}{ABC}$ را a فرض کنیم، ضلع مثلث ADE برابر ارتفاع مثلث ABC یعنی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ خواهد بود و **نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه** با **مربع نسبت تشابه** برابر است.

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{a})^۲ = \frac{۳}{۴}$$

نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

۱) نسبت هر دو جزء متناظر از جنس **پاره‌خط** (**ارتفاع**، **میانه**، **نیمساز**، **محیط** و ...) در دو مثلث متشابه، برابر با نسبت تشابه یا همان k است.

۲) نسبت **مساحت‌های** دو مثلث متشابه برابر $k^۲$ است.

تشابه n-ضلعی‌های منتظم

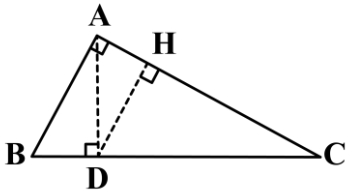
هر دو n-ضلعی منتظم متشابه‌اند. (زیرا همهٔ زوایا با هم برابرند و اضلاع نظیر به نظیر متناسبند.) به ویژه هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع با هم متشابه‌اند.

یادآوری!

ارتفاع مثلث **متساوی‌الاضلاع** به ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

ماز

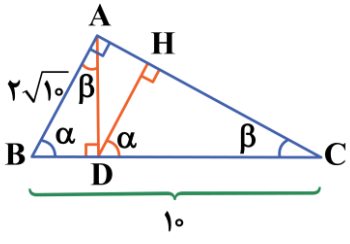
۳۰- **در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل مقابل، $AB = ۲\sqrt{۱۰}$ و $BC = ۱۰$ می‌باشد. مساحت مثلث DHC چند درصد مساحت مثلث ABD است؟**



۱) ۶۰٪
۲) ۸۰٪
۳) ۹۰٪
۴) ۹۵٪

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ هندسه ۱ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۰۰۲)

طبق **فیثاغورس** در مثلث ABC داریم:



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow ۱۰۰ = ۴۰ + AC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۶۰ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۵}$$

حال با توجه به **روابط طولی** در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

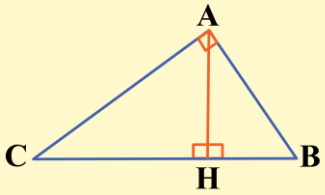
$$AC^۲ = BC \times DC \Rightarrow ۶۰ = ۱۰ \times DC \Rightarrow DC = ۶$$

حال دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و DHC متشابه‌اند، بنابراین نسبت مساحت آن‌ها با **مربع نسبت تشابه** برابر است:

$$\frac{S_{\triangle DHC}}{S_{\triangle ABD}} = (\frac{DC}{AB})^۲ = (\frac{۶}{۲\sqrt{۱۰}})^۲ = \frac{۹}{۱۰}$$ یا ۹۰٪

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در مثلث قائم‌الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را **روابط طولی** می‌نامیم، زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند.



۱) $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$
۲) $AH \times BC = AB \times AC$
۳) $AH^۲ = BH \times HC$
۴) $AB^۲ = BH \times BC$
۵) $AC^۲ = CH \times BC$

توجه!

توجه کنید عکس روابط طولی هم درست هستند، یعنی اگر در مثلث ABC با رسم ارتفاع AH هر یک از روابط بالا برقرار باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه است، یعنی $\hat{A}=۹۰^\circ$ می‌باشد.

ماز

۳۱- حاصل $[۱۳۵,(۹۵۰,۳۷۵)]$ کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۶۷۵ ۳) ۲۰۲۵ ۴) ۹۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

برای محاسبهٔ ب.م.م ابتدا اعداد را به عامل‌های اولشان تجزیه می‌کنیم:

$$(۹۵۰,۳۷۵)=(۲\times۵^۲\times۱۹,۳\times۵^۳)=۵^۲$$

$$\Rightarrow\left[۱۳۵,۵^۲\right]=\left[۳^۳\times۵,۵^۲\right]=۳^۳\times۵^۲=۶۷۵$$

ب.م.م چیست؟

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد، **بزرگ‌ترین عدد مثبتی** است که **هر دو عدد بر آن بخش‌پذیرند** و آن را با (a,b) نشان می‌دهیم.

روش محاسبهٔ ب.م.م دو عدد

برای محاسبهٔ (a,b) هر کدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان **تجزیه** کرده و **عوامل مشترک با توان کم‌تر** را به عنوان عوامل ب.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل ضربِ آن عوامل، همان ب.م.م خواهد بود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

محاسبهٔ $(۲۰۰,۷۲۰)$:

$۲۰۰=۲^۳\times۵^۲$ $۷۲۰=۲^۴\times۳^۲\times۵^۱$ عوامل مشترک، با توان کمتر $\rightarrow ۲^۳\ ,\ ۵^۱$ $\Rightarrow$ ب.م.م $=۲^۳\times۵^۱=۴۰$

ک.م.م چیست؟

کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) دو عدد، **کوچک‌ترین عدد مثبتی** است که **بر هر دو عدد بخش‌پذیر است** و آن را با $[a,b]$ نشان می‌دهیم.

روش محاسبهٔ ک.م.م دو عدد

برای محاسبهٔ $[a,b]$ هر کدام از اعداد a و b را به عوامل اولشان **تجزیه** کرده و **عوامل مشترک با توان بزرگ‌تر و عوامل غیرمشترک** را به عنوان عوامل ک.م.م انتخاب می‌کنیم. حاصل‌ضرب آن عوامل، همان ک.م.م خواهد بود.

یه نمونهٔ باحال ببین!

محاسبهٔ $[۱۰۰۸,۶۰۰]$:

$۱۰۰۸=۲^۴\times۳^۲\times۷^۱$ عوامل غیرمشترک $\rightarrow ۵^۲\times۷^۱$ $\Rightarrow$ ک.م.م $=۲^۴\times۳^۲\times۵^۲\times۷^۱=۲۵۲۰۰$

$۶۰۰=۲^۳\times۳^۱\times۵^۲$ عوامل مشترک، با توان بزرگ‌تر $\rightarrow ۲^۴\times۳^۲$

چند نکته دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م

۱) $(ab,ac)=a(b,c)$

۲) $a|b\Rightarrow(a,b)=a\ ,\ [a,b]=b$

۳) $(a,c)=۱\Rightarrow(a,bc)=(a,b)$

ماز

۳۲- اگر $b=۶k+۵$ و $a|b$ آنگاه حاصل $a^۲+۵b^۲$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۴۸۷۴ ۲) ۸۴۰۶ ۳) ۴۲۰۶ ۴) ۳۱۷۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی/مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

b عددی فرد است و چون **تمام شمارنده‌های b** فرد می‌شوند، پس a هم فرد است؛ بنابراین هم $a^۲$ و هم $b^۲$ به فرم $۸k+۱$ بوده و حاصل $a^۲+۵b^۲$ به فرم $۸q+۶$ می‌شود.

بررسی گزینه‌ها:

۱

به فرم $۸q+۲$ است: $۴۸۷۴=۸(۶۰۹)+۲$

۲

به فرم $۸q+۶$ است: $۸۴۰۶=۸(۱۰۵۰)+۶$

به‌ازای $a=۱$ و $b=۴۱$ تولید می‌شود: $۱^۲+۵(۴۱)^۲=۸۴۰۶$

۳

به فرم $۸q+۶$ است: $۴۲۰۶=۸(۵۲۵)+۶$

به‌ازای $a=۱$ و $b=۲۹$ تولید می‌شود: $۱^۲+۵(۲۹)^۲=۴۲۰۶$

۴

$۳۱۷۴=۸(۳۹۶)+۶$

به‌ازای $a=۲۳$ و $b=۲۳$ تولید می‌شود: $۲۳^۲+۵(۲۳)^۲=۳۱۷۴$

۳۳- اگر $(a,۷۴۰)=۷۴$ و $(a,۹۹۹)=۱۱۱$، آنگاه عدد $(a,۱۸۰)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

$(a,۷۴۰)=(a,۲^۲\times۵\times۳۷)=۲\times۳۷$

$(a,۹۹۹)=۱۱۱\Rightarrow(a,۳^۳\times۳۷)=۳\times۳۷$

بنابراین $a\nmid ۵$، $a\mid ۲$، $a^۲\nmid ۲$ و $a\mid ۳۷$. از طرفی:

بنابراین: $a\mid ۳۷$ و $a\mid ۳$ و $a\nmid ۳^۲$

به عبارتی a **تنها یک** عامل ۲، **تنها یک** عامل ۳ و **حداقل یک** عامل ۳۷ دارد. از طرفی a قطعاً مضرب ۵ نیست، بنابراین:

$(a,۱۸۰)=(a,۲^۲\times۳^۲\times۵)=۲\times۳=۶$

۳۴- اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم عدد $۵۴+۱۸!$ بر عدد ۱۷ را به ترتیب r و q بنامیم، آنگاه رقم یکان $q+۴r$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

خارج قسمت تقسیم $۵۴+۱۸!$ بر ۱۷ برابر است با جزءصحیح $[\frac{۵۴+۱۸!}{۱۷}]$، پس:

$$q=[\frac{۱۸!}{۱۷}+\frac{۵۴}{۱۷}]=[۱۸\times۱۶!+(۳+\frac{۳}{۱۷})]=۱۸\times۱۶!+۳$$

چون $۱۶!$ **مضرب ۱۰** است، پس **رقم یکان q** برابر ۳ است.

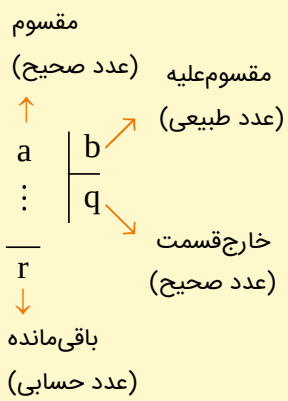
از طرفی: $۱۸!+۵۴=۱۸!+۵۱+۳=۱۷k+۳$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

بنابراین $r=3$ و رقم یکان $4r=12$ برابر ۲ می‌شود، درنتیجه رقم یکان $q+4r$ برابر ۵ به‌دست می‌آید.

قضیهٔ تقسیم

اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج قسمت q و باقی‌مانده r باشد، خواهیم داشت:



$$\Rightarrow \quad a=bq+r \;;\; (0\le r<b)$$

یه نکتهٔ طلایی!

خارج قسمت تقسیم a بر b برابر است با **جزءصحیح** تقسیم a بر b یعنی: $[\frac{a}{b}]$

۳۵- چند عدد طبیعی وجود دارد که در تقسیم هر یک از آن‌ها بر ۵۰، باقی‌مانده با ثلث مربع خارج‌قسمت برابر باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به قضیه تقسیم داریم: $a=50q+\frac{q^2}{3}$

اما در تقسیم باید باقی‌مانده از مقسوم‌علیه کوچک‌تر باشد و حداقل نیز برابر با صفر است.

$$0\le\frac{q^2}{3}\le 49\Rightarrow 0\le q^2\le 147\Rightarrow 0\le q\le 12$$

اما اگر $q=0$، آنگاه $a=0$ و دیگر a طبیعی **نیست**، پس صفر قابل قبول نیست.

از طرفی $\frac{q^2}{3}$ نقش باقی‌مانده را دارد پس باید عددی صحیح باشد. به عبارتی q^2 باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و چون ۳ اول است، خود q نیز باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بنابراین q عدد طبیعی مضرب ۳ و کوچک‌تر یا مساوی ۱۲ است که ۴ مقدار زیر را می‌تواند داشته باشد:

$$q=3,6,9,12$$

۳۶- چند عدد طبیعی مانند b وجود دارد به‌طوری‌که باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد ۵۰۰ و ۲۲۰ بر b به ترتیب برابر با ۲۰ و ۴ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

بنابر قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}500=bq+20\;,\;20<b\\220=bq'+4\;,\;4<b\end{array}\right\}\Rightarrow 20<b$$

بنابراین:

$$\begin{cases}bq=500-20=480\Rightarrow b\mid 480\\ bq'=220-4=216\Rightarrow b\mid 216\end{cases}$$

$\Rightarrow b \mid (۴۸۰, ۲۱۶) \Rightarrow b \mid ۲۴ \xrightarrow{۲۰<b} b = ۲۴$

بنابراین تنها یک عدد طبیعی با این شرایط وجود دارد.

توجه!

توجه کنید که:

$(۴۸۰, ۲۱۶) = (۲^۵ \times ۳ \times ۵, ۲^۳ \times ۳^۳) = ۲^۳ \times ۳ = ۲۴$

راهنمای زرنگ‌بازی!

اگر عددی هر دو عدد a و b را بشمارد، آنگاه **ب.م.م** آن‌ها را نیز می‌شمارد.

$$\begin{cases} r \mid a \\ r \mid b \end{cases} \Rightarrow r \mid (a, b)$$

اگر a و b هر دو، عددی را بشمارند، آنگاه **ک.م.م** آن‌ها نیز آن عدد را می‌شمارد.

$$\begin{cases} a \mid r \\ b \mid r \end{cases} \Rightarrow [a, b] \mid r$$

۳۷- در یک تقسیم اگر a مقسوم بوده و باقی‌مانده ۵ واحد از مقسوم‌علیه کمتر باشد، در صورتی که به مقسوم و مقسوم‌علیه هر کدام یک واحد اضافه شود، از خارج‌قسمت و باقی‌مانده هر کدام یک واحد کم می‌شود. کدام عدد مربع کامل است؟

۱) $a + ۹$ ۲) $a + ۸$ ۳) $a + ۷$ ۴) $a + ۶$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

ترجمهٔ صورت سؤال

«در یک تقسیم اگر a مقسوم بوده و باقی‌مانده ۵ واحد از مقسوم‌علیه کمتر باشد» یعنی اگر مقسوم‌علیه b، خارج قسمت q و باقی‌مانده r باشد، داریم:

$a = bq + r \; ; \; r = b - ۵$

$a = bq + r \; ; \; r = b - ۵$

ابتدا طبق فرض داریم:

حال یک واحد به a و b اضافه می‌کنیم و درنتیجه **یک واحد** از **خارج قسمت** و **باقی‌مانده** کم می‌شود:

$a + ۱ = (b + ۱)(q - ۱) + (r - ۱) \Rightarrow a + ۱ = bq - b + q - ۱ + r - ۱ \xrightarrow{a = bq + r} bq + r + ۱ = bq - b + q - ۱ + r - ۱ \Rightarrow q = b + ۳$

بنابراین:

$a = bq + r = b(b + ۳) + b - ۵$

$\Rightarrow a = b^۲ + ۳b + b - ۵ = b^۲ + ۴b - ۵ = b^۲ + ۴b + ۴ - ۹$

$\Rightarrow a + ۹ = b^۲ + ۴b + ۴ = (b + ۲)^۲$ مربع کامل

۳۸- باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^{۱۸}$ بر ۱۳ برابر ۱ است. a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ گسسته صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

اگر a را برابر ۹ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$۹^{۱۸} = ۳^{۳۶}$

$۳^۳ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۳^۳)^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} (۱)^{۱۲} \Rightarrow ۳^{۳۶} \overset{۱۳}{\equiv} ۱$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱

$۷^۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۳ \Rightarrow (۷^۲)^۳ \overset{۱۳}{\equiv} (-۳)^۳ \Rightarrow ۷^۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۷^۶)^۳ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^۳ \Rightarrow ۷^{۱۸} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲$ ×

۲

$۸^{۱۸} = ۲^{۵۴} \Rightarrow ۲^۶ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۶)^۹ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^۹ \Rightarrow ۲^{۵۴} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲$ ×

۴

$۵^۲ \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^۲)^۹ \overset{۱۳}{\equiv} (-۱)^۹ \Rightarrow ۵^{۱۸} \overset{۱۳}{\equiv} -۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲$ ×

ماز

۳۹- اگر $۲a \overset{۱۰}{\equiv} ۵b$، آنگاه چند نتیجه از نتایج زیر، همواره صحیح است؟

الف: $۲a + ۵b \overset{۱۰}{\equiv} ۰$

ب: $a \overset{۵}{\equiv} ۰$

ج: $a \overset{۲}{\equiv} ۰$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۱ و ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

الف) صحیح است.

$$۲a \overset{۱۰}{\equiv} ۵b \xrightarrow{-۵b} ۲a - ۵b \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \xrightarrow{\text{طرف چپ } +۱۰b} ۲a + ۵b \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

ب) صحیح است.

$$۲a \overset{۱۰}{\equiv} ۵b \Rightarrow \begin{cases} ۲a \overset{۵}{\equiv} ۵b \Rightarrow ۲a \overset{۵}{\equiv} ۰ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} a \overset{۵}{\equiv} ۰ \\ ۲a \overset{۲}{\equiv} ۵b \Rightarrow ۵b \overset{۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow b \overset{۲}{\equiv} ۰ \end{cases}$$

ج) لزوماً صحیح نیست. به طور مثال:

$$\begin{matrix} a = ۵ \\ b = ۲ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a = ۵b = ۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰ \\ a \overset{۲}{\equiv} ۵ \overset{۲}{\equiv} ۱ \end{cases}$$

بنابراین فقط ۲ مورد همواره صحیح هستند.

همنهشتی

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m که عددی طبیعی است **باقی‌ماندهٔ یکسانی** داشته باشند، می‌گوییم a و b با یکدیگر به پیمانهٔ m **هم‌نهشت** هستند و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

رابطهٔ همنهشتی را به‌صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$a = mk + b \text{ یا } a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a - b$$

ویژگی‌های همنهشتی

۱) هر عدد با خودش همنهشت است.

$$a \overset{m}{\equiv} a$$

۲) همنهشتی دارای خاصیت **تعدی** است.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ b \overset{m}{\equiv} c \end{cases} \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

۳) دو طرف همنهشتی را می‌توانیم با هر **عدد صحیحی جمع یا تفریق** کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$$

۴) دو طرف همنهشتی را می‌توانیم در هر **عدد صحیحی ضرب** کنیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۵) دو طرف همنهشتی را می‌توانیم به **توان عدد طبیعی n** برسانیم.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

۶) در هر همنهشتی می‌توانیم **مضارب مختلف پیمانه** را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک‌کردن اعداد دو طرف است.

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm mq \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

۷) طرفین دو همنهشتی با **پیمانه‌های یکسان** را می‌توانیم با هم **جمع و تفریق** و یا در هم **ضرب** کنیم.

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ c \overset{m}{\equiv} d \end{cases} \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d \text{ یا } ac \overset{m}{\equiv} bd$$

۸) در هر همنهشتی می‌توانیم **به جای پیمانه**، یکی از **مقسوم‌علیه‌های طبیعی** آن را قرار دهیم.

$$a^{m} \equiv b \xrightarrow{n \mid m} a^{n} \equiv b$$

۹) اگر دو طرف همنهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a **تقسیم** کنیم، با این شرط که **پیمانه** را نیز باید بر $d=(a,m)$ که همان **ب.م.م** a و m است تقسیم کنیم:

$$ax \equiv ay \xrightarrow[(a,m)=d]{\div a} x \equiv y^{\frac{m}{d}}$$

۱۰) اگر دو همنهشتی دارای **طرفین یکسان** و **پیمانه‌های متفاوت** باشند به‌صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک همنهشتی تبدیل کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \equiv b \ (m) \\ a \equiv b \ (n) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \equiv b \ ([m,n])$$

۱۱) اگر پیمانه به‌صورت $m=rs$ باشد دو همنهشتی صحیح دیگر نیز از آن نتیجه می‌شود:

$$a \equiv b \ (m) \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b \ (r) \\ a \equiv b \ (s) \end{cases}$$

۴۰- **اگر $1+2!+3!+\ldots+1405!+3 \equiv 6x \ (15)$، آنگاه x کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱۲۴ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۲۳ ۴) ۱۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۲۱ ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم از $5!$ به بعد همه فاکتوریل‌ها بر ۱۵ بخش‌پذیرند، زیرا **هم عامل ۵** و **هم عامل ۳** را دارند. بنابراین به پیمان] ۱۵ با **صفر** همنهشت هستند، در نتیجه:

$$6x \equiv 1+2+6+24+0+0+\ldots+0+3 \ (15)$$

$$\Rightarrow 6x \equiv 36 \ (15) \xrightarrow[(15,6)=3]{\div 6} x \equiv 6 \equiv 1 \ (5^{5})$$

بنابراین x در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۱ دارد، پس تنها می‌تواند گزینهٔ «۲» باشد.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

بودجه‌بندی این آزمون

فیزیک ۱: کار، انرژی و توان - صفحه‌های ۵۳ تا ۸۲
فیزیک ۳: حرکت بر خط راست (از ابتدای حرکت با سرعت ثابت تا پایان فصل ۱) - صفحه‌های ۱۳ تا ۲۸

سهم در کنکور

پایهٔ دهم: درمجموع ۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.
پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۳ یا ۴ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

آزمون امروزتون در درس فیزیک دوازدهم از فصل «حرکت‌شناسی» هست که قراره در این آزمون این فصل رو به اتمام برسونیم.

تعداد تست‌ها و بارم امتحان نهایی این فصل مطابق جدول زیره:

نام فصل	تعداد تست در کنکور	بارم در امتحان نهایی
حرکت‌شناسی	۴	۳/۷۵

با توجه به این‌که در این آزمون وارد مبحث «حرکت با شتاب ثابت» می‌شیم و این مبحث از مباحث بسیار دشوار کنکور محسوب می‌شه، درجهٔ سختی این آزمون نسبت به دو مرحلهٔ گذشته افزایش پیدا کرده؛ بنابراین اگه درصدتون نسبت به آزمون‌های قبل پایین‌تر اومد، نگران نشید، چون علتش سخت‌تر بودن آزمونه! پس توصیه می‌کنیم به‌جای درصد، ترازتون با آزمون‌های گذشته رو مقایسه کنین.

قسمت مربوط به فیزیک دهم این آزمون، از فصل «کار و انرژی» هست و سعی کردیم سؤالاتی رو براتون آماده کنیم که یا ایده‌های اونا توی سال‌های گذشته در کنکور مطرح شده و یا مربوط به شکل‌ها و تمرین‌های کتاب درسی هستند.

راستی جدول تعداد تست‌های این فصل در کنکور هم براساس کنکورهای چهار سال تاخیر به شکل زیره:

نام فصل	تعداد تست در کنکور تجربی	تعداد تست در کنکور ریاضی
کار و انرژی	۱ یا ۲	۲

موفق باشید.

سجاد صادقی‌زاده (رتبهٔ ۱ کنکور ۱۳۹۲) و سعید احمدی - مسئولین درس فیزیک آزمون‌های تستی ماز

۴۱- ماهواره‌ای در فاصلهٔ ۳۳۰۰۰ کیلومتری یک ایستگاه زمینی قرار دارد. یک تپ الکترومغناطیسی که با سرعت نور ($۳\times۱۰^{۸}\ \frac{m}{s}$) در فضا حرکت می‌کند، به سمت ماهواره فرستاده می‌شود. بازتاب این تپ چند میلی‌ثانیه پس از ارسال، توسط ایستگاه دریافت می‌شود؟

۱) ۰/۱۱ ۲) ۰/۲۲ ۳) ۲۲۰ ۴) ۱۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

طبق رابطهٔ تندی متوسط داریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow ۳\times۱۰^{۸}=\frac{۲\times۳۳۰۰۰\times۱۰^{۳}}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۰/۲۲s=۲۲۰ms$$

دقت کنید که با توجه به تندی ثابت تپ، تندی متوسط برابر با همان تندی لحظه‌ای است. همچنین، مسافت طی‌شده دو برابر فاصلهٔ ایستگاه تا ماهواره است.

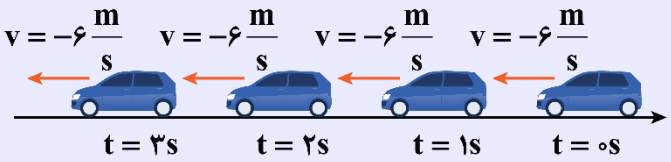
سوتی‌های پرتکرار

اگه مسافت طی‌شده را برابر با فاصلهٔ ماهواره تا ایستگاه درنظر بگیری، توی دام گزینهٔ (۴) میفتی!

حرکت با سرعت ثابت

در این نوع حرکت، اندازه و جهت سرعت متحرک در طول مسیر ثابت است پس در حرکت با سرعت ثابت، سرعت متوسط متحرک در هر بازهٔ زمانی دلخواه برابر سرعت لحظه‌ای آن است:

اندازهٔ سرعت متوسط = تندی متوسط = اندازهٔ سرعت لحظه‌ای = تندی لحظه‌ای



حرکت با سرعت ثابت

- حرکت روی خط راست انجام می‌شود. → جهت سرعت ثابت است.
- تندی با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. → اندازهٔ سرعت ثابت است.

→ اندازهٔ سرعت و جهت سرعت ثابت است.
پس شتاب حرکت صفر است. $(a = 0)$

در حرکت با سرعت ثابت

۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند:
$v_{av} = v$

۲- شتاب حرکت صفر است.

۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d| = L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v| = s)$.

معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$\text{مکان در لحظهٔ } t \leftarrow x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان}}{t} + x_0 \rightarrow \text{مکان اولیه}$$

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت

$$\text{جابه‌جایی} \leftarrow \Delta x = \underset{\text{سرعت}}{v}\underset{\text{زمان سپری‌شده}}{\Delta t}$$

چون جهت حرکت ثابت است، در این رابطه اندازهٔ Δx برابر مسافت طی‌شده می‌باشد.

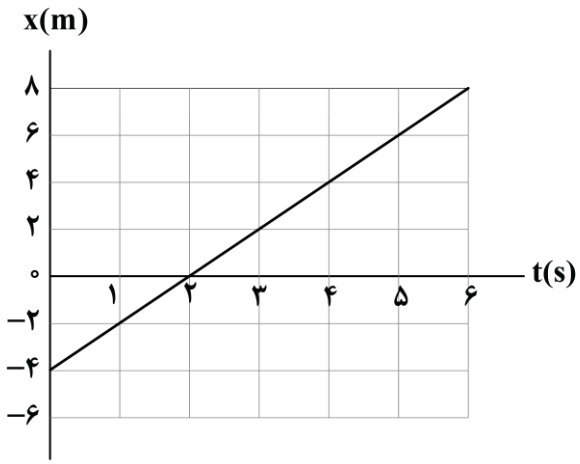
چگونه با استفاده از مکان متحرک در دو لحظهٔ t_1 و t_2، معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت را به‌دست آوریم؟

۱- در معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با سرعت ثابت یعنی $x = vt + x_0$ به‌جای t و x مقادیرشان را در دو نقطه جایگذاری می‌کنیم.

۲- با استفاده از دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، مقادیر x_0 و v را به‌دست می‌آوریم.

۳- طبق رابطهٔ $x = vt + x_0$، با داشتن v و x_0 معادلهٔ $x - t$ را می‌نویسیم.

۴۲- شکل زیر، بخشی از نمودار مکان ـ زمان شخصی را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت حرکت می‌کند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟



الف: تندی حرکت شخص $۷/۲\frac{km}{h}$ است.

ب: فاصلهٔ شخص از مبدأ محور، دو بار در لحظات $t_۱ = ۰/۵s$ و $t_۲ = ۳/۵s$ برابر $۳m$ می‌شود.

ج: جابه‌جایی شخص در یک دقیقهٔ اول حرکت برابر $۱۰۰m$ است.

۱) فقط «ب»

۲) «الف» و «ب»

۳) فقط «ج»

۴) «الف» و «ج»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۴ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

با توجه به نمودار مکان ـ زمان، اول معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک رو به‌دست بیار. بعدش هر یک از عبارات رو بررسی کن.

بررسی موارد:

الف) سرعت متحرک برابر شیب نمودار مکان ـ زمان است؛ بنابراین داریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴}{۲} = ۲\frac{m}{s} = ۲\times ۳/۶\frac{km}{h} = ۷/۲\frac{km}{h}$$ (✓)

ب) معادلهٔ حرکت متحرک را می‌نویسیم:

$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[x_۰ = -۴m]{v = ۲\frac{m}{s}} x = ۲t - ۴$$

فاصله از مبدأ محور: $|x| = ۳m \Rightarrow |۲t-۴| = ۳ \Rightarrow ۲t - ۴ = \pm ۳ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰/۵s \\ t_۲ = ۳/۵s \end{cases}$

بنابراین در دو لحظهٔ $t_۱ = ۰/۵s$ و $t_۲ = ۳/۵s$، فاصلهٔ شخص از مبدأ برابر با $۳m$ است. (✓)

ج) برای محاسبهٔ جابه‌جایی در مدت یک دقیقه می‌توان نوشت:

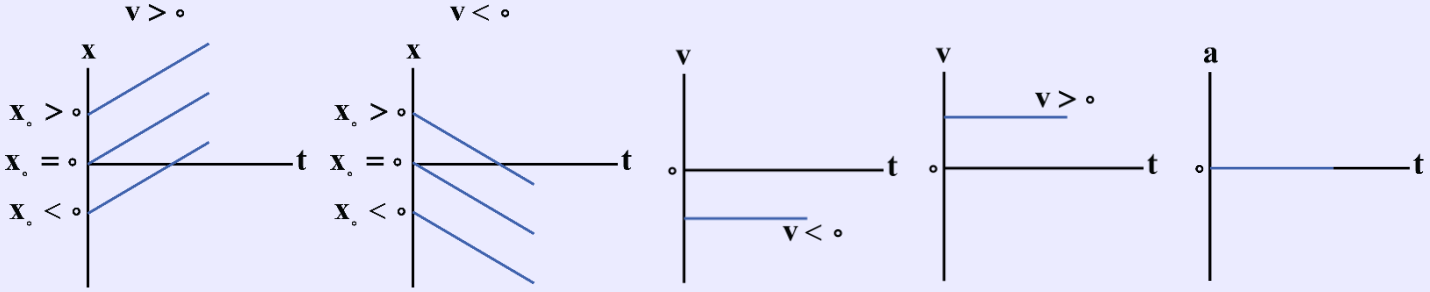
$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \Delta x = ۲\times ۶۰ = ۱۲۰m$$ (✗)

نمودارها در حرکت با سرعت ثابت

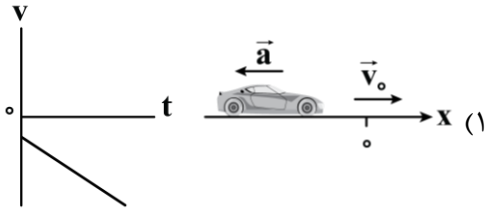
۱- طبق معادلهٔ مکان ـ زمان که به‌صورت یک معادلهٔ خطی است، نمودار مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به‌صورت خط راستی با شیب ثابت v و عرض از مبدأ $x_۰$ است:

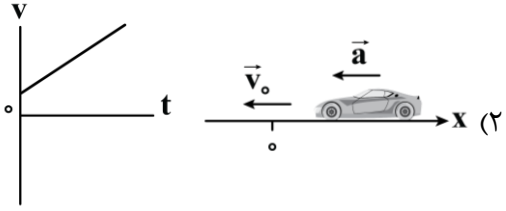
۲- نمودار سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت، خط راستی موازی محور t است.

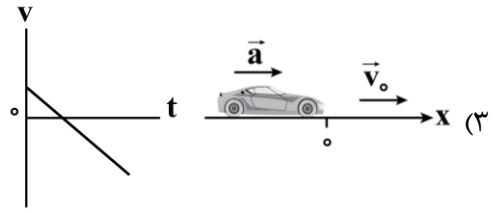
۳- شتاب در حرکت با سرعت ثابت، همواره صفر است.

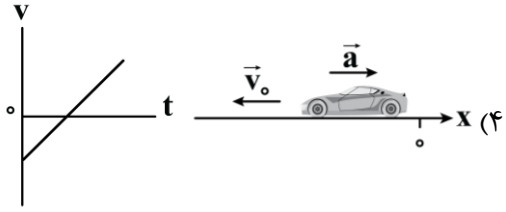


۴۳- در تمامی گزینه‌های زیر، متحرک با شتاب ثابت روی محور xها حرکت می‌کند. در کدام گزینه، نمودار سرعت ـ زمان متحرک به‌درستی رسم شده است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

در گزینهٔ (۴) شتاب، مثبت $(a>0)$ و سرعت اولیه، منفی $(v_0<0)$ است که نمودار سرعت ـ زمان آن به‌درستی نشان داده شده است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سرعت اولیهٔ متحرک باید مثبت باشد.

۲) شتاب متحرک، منفی است؛ پس شیب نمودار $v-t$ باید منفی باشد، همچنین سرعت اولیه باید منفی باشد.

۳) شتاب متحرک، مثبت است؛ پس شیب نمودار $v-t$ باید مثبت باشد.

حرکت با شتاب ثابت

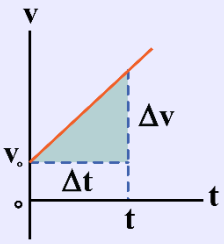
هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت:

۱- سرعت متحرک با زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند؛ پس تغییرات v نسبت به t به‌صورت یک تابع خطی است، به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی معادلهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت به‌صورت زیر خواهد بود:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}}v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}\Rightarrow v_{av}=v_{(\frac{t_1+t_2}{2})}\xrightarrow{v=at+v_0}v_{av}=\frac{1}{2}a(t_1+t_2)+v_0$$

۲- شیب نمودار سرعت ـ زمان ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان}=a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۳- شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.

شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است:

$$a=a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

SanjeshCloud

۴- معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند.

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t ← x

a: شتاب ثابت متحرک

v_0: سرعت اولیه

x_0: مکان اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک تابعی درجهٔ دوم از زمان است.

۵- معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

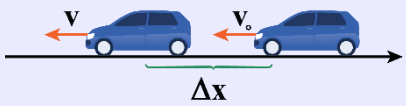
v: سرعت متحرک در لحظهٔ t

a: شتاب ثابت متحرک

v_0: سرعت اولیه

۶- معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

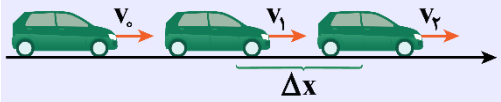
در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷- معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}\Delta t$$

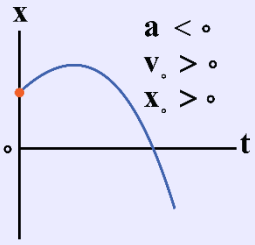
معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

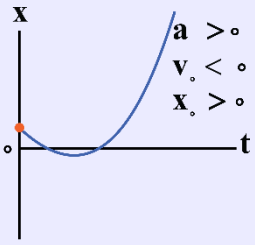
جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $[0, t]$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

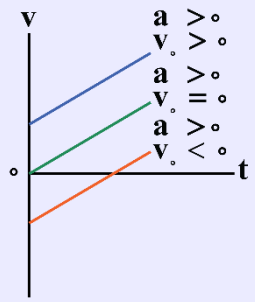
نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

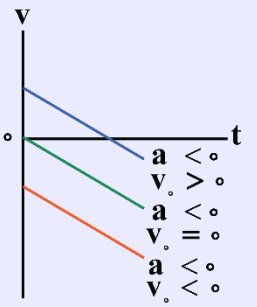
۱- نمودار مکان ـ زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



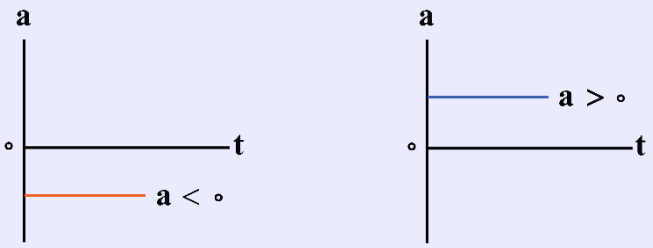


۲- نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت یک خط با شیب ثابت است.





۳- نمودار شتاب ـ زمان به‌صورت یک خط افقی است.



۴۴- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=-۲t^۲+۱۲t-۱۰$ است. به‌ترتیب سرعت متحرک در پایان ثانیهٔ پنجم حرکت چند متر بر ثانیه است و در چه لحظه‌ای، جهت حرکت متحرک عوض می‌شود؟

۱) $۸\vec{i}$، پایان ثانیهٔ سوم ۲) $۸\vec{i}$، پایان ثانیهٔ چهارم ۳) $-۸\vec{i}$، پایان ثانیهٔ سوم ۴) $-۸\vec{i}$، پایان ثانیهٔ چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

اول با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، معادلهٔ سرعت ـ زمان رو به‌دست بیار. بعدش ریشهٔ معادله و سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ رو حساب کن.

گام اول

با مقایسهٔ معادلهٔ داده‌شده با معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت شتاب ثابت، داریم:

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \\ x=-۲t^۲+۱۲t-۱۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰=۱۲\frac{m}{s} \\ x_۰=-۱۰m \end{cases}$$

گام دوم

معادلهٔ سرعت ـ زمان را می‌نویسیم:

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_۰=۱۲\frac{m}{s}]{a=-۴\frac{m}{s^۲}} v=-۴t+۱۲$$

گام سوم

سرعت در لحظهٔ $t=۵s$ برابر است با:

$$v=-۴\times۵+۱۲=-۸\frac{m}{s} \Rightarrow \vec{v}=(-۸\frac{m}{s})\vec{i}$$

گام آخر

طبق معادلهٔ $v=-۴t+۱۲$، در لحظهٔ $t=۳s$ (پایان ثانیهٔ سوم)، سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت عوض می‌شود.

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت

معادلهٔ مکان ـ زمان درجهٔ دوم با فرم $x = At^{۲} + Bt + C$ از پرکاربردترین معادلات این فصل می‌باشد. با استفاده از این معادله، موارد مهمی را می‌توان نتیجه گرفت:

۱- تعیین لحظهٔ تغییر جهت متحرک (t_s):

$$t_s = \frac{-B}{۲A}$$

در لحظهٔ $t_s = \frac{-B}{۲A}$، متحرک برای لحظه‌ای ایستاده و تغییر جهت می‌دهد.

۲- تعیین شتاب حرکت متحرک (a):

شتاب متحرکی که معادلهٔ مکان ـ زمان آن درجهٔ دوم است، ثابت است.

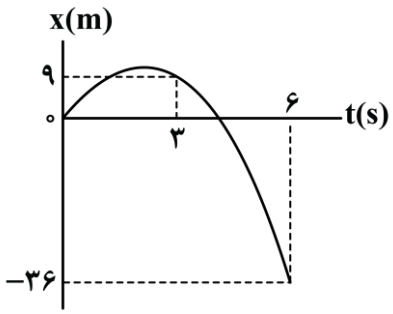
۳- تعیین سرعت اولیهٔ متحرک $(v_۰)$:

$$v_۰ = B$$

۴- تعیین مکان اولیهٔ متحرک $(x_۰)$:

$$x_۰ = C$$

۴۵- نمودار مکان ـ زمان حرکت متحرکی مطابق سهمی شکل زیر است. بزرگی شتاب متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۳s$ تا $t_۲ = ۶s$ چند واحد SI است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

به کمک سه نقطه از نمودار مکان ـ زمان سهمی می‌تونی معادلهٔ حرکت رو به‌دست بیاری.

با توجه به نمودار مکان ـ زمان، معادلهٔ سهمی را به‌دست می‌آوریم. می‌دانیم این نمودار مربوط به حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین داریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_۰t + x_۰ \xrightarrow{x_۰ = ۰} x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_۰t \begin{cases} t_۱ = ۳s : ۹ = \frac{۱}{۲}a(۳)^{۲} + v_۰(۳) \\ t_۲ = ۶s : -۳۶ = \frac{۱}{۲}a(۶^{۲}) + v_۰(۶) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۹ = ۴/۵a + ۳v_۰ \\ -۳۶ = ۱۸a + ۶v_۰ \end{cases} \Rightarrow v_۰ = ۱۲\frac{m}{s} \ , \ a = -۶\frac{m}{s^{۲}}$$

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، شتاب متوسط در تمام بازه‌ها یکسان و برابر با شتاب حرکت است؛ بنابراین شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ نیز $-۶\frac{m}{s^{۲}}$ است.

۴۶- معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=-2t^2+6t-3$ است. تندی متوسط متحرک در ثانیهٔ دوم چند برابر بزرگی سرعت متوسط آن در دو ثانیهٔ اول است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

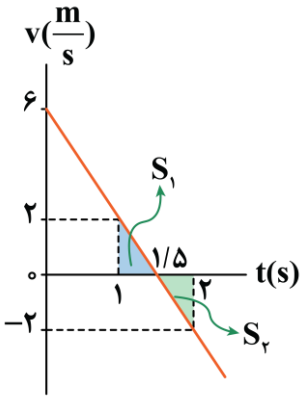
راه نجات سریع

از روی معادلهٔ مکان ـ زمان، معادلهٔ سرعت ـ زمان رو به‌دست بیار و نمودار سرعت ـ زمان رو رسم کن و از مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t استفاده کن.

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت، درجهٔ دو است؛ یعنی حرکت شتاب ثابت است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} x=-2t^2+6t-3 \\ x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \end{cases} \Rightarrow v_0=6\,\frac{m}{s}\,,\ a=-4\,\frac{m}{s^2}\,,\ x_0=-3\ m$$

معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک را نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم. مسافت طی‌شده را در ثانیهٔ دوم (۱s تا ۲s) و جابه‌جایی آن را در دو ثانیهٔ اول (صفر تا ۲s) با استفاده از مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t محاسبه می‌کنیم:



$$\begin{cases} v=at+v_0 \\ v=-4t+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t_1=1s \Rightarrow v_1=-4(1)+6=2\,\frac{m}{s} \\ t_2=2s \Rightarrow v_2=-4(2)+6=-2\,\frac{m}{s} \end{matrix}$$

لحظهٔ تغییر جهت حرکت: $v=0 \Rightarrow 0=-4t+6 \Rightarrow t=1/5s$

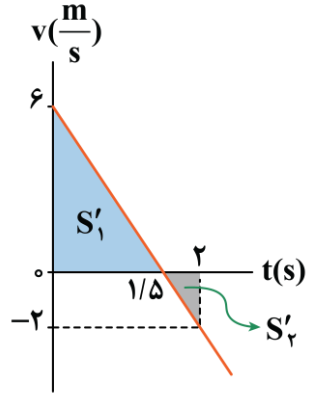
مسافت طی‌شده در ثانیهٔ دوم:

$$\ell=S_1+S_2=\frac{2\times 0/5}{2}+\frac{2\times 0/5}{2}=1m$$

تندی متوسط در ثانیهٔ دوم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{1}{1}=1\,\frac{m}{s}$$

جابه‌جایی در دو ثانیهٔ اول:



$$\Delta x_{(0-2)}=S'_1-S'_2=\frac{6\times 1/5}{2}-\frac{2\times 0/5}{2}=4/5-0/5=4m$$

سرعت متوسط در دو ثانیهٔ اول:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{4}{2}=2\,\frac{m}{s}$$

نسبت تندی متوسط در بازهٔ زمانی ۱s تا ۲s به بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s برابر است با:

$$\frac{s_{av\,(1s-2s)}}{|v_{av(0-2s)}|}=\frac{1}{2}$$

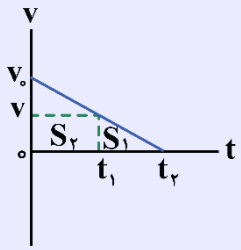
نکته

در لحظه‌ای که نمودار $v-t$، محور زمان را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت داده و سرعتش صفر می‌شود.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

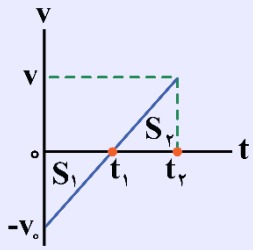
تشابه در نمودار سرعت ـ زمان

در سؤالات حرکت‌شناسی و نمودارهای این بخش، استفاده از تشابه مثلث‌ها بسیار پرکاربرد است. مثلاً در نمودارهای سرعت ـ زمان زیر می‌توانیم تشابه را برای مثلث‌ها به‌کار ببریم:



$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_2}$$

$$\text{نسبت مساحت مثلث‌ها} = \frac{S_1}{S_1 + S_2} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_2})^2$$

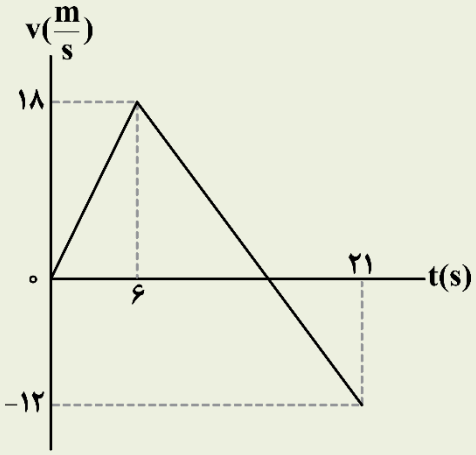


$$\text{نسبت تشابه مثلث‌ها} = \frac{v}{v_0} = \frac{t_2 - t_1}{t_1}$$

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{S_2}{S_1} = (\frac{v}{v_0})^2 = (\frac{t_2 - t_1}{t_1})^2$$

آزمون سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۵۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر متحرک در لحظهٔ $t = 0s$ از مکان $\vec{x}_0 = (10m)\vec{i}$ عبور کند، در چه لحظه‌هایی برحسب ثانیه، مکان متحرک $\vec{x} = (136m)\vec{i}$ است؟



۱) ۱۰ و ۱۵

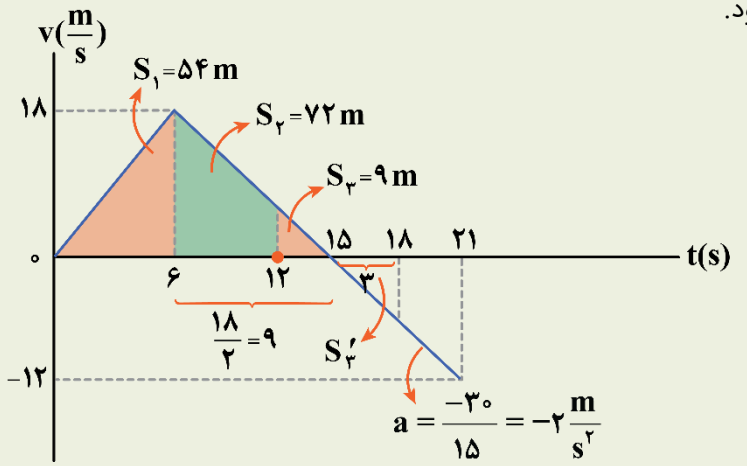
۲) ۱۲ و ۱۸

۳) ۱۳/۵ و ۱۶/۵

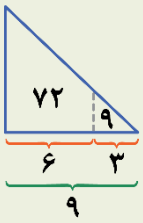
۴) ۱۰/۵ و ۱۹/۵

پاسخ تشریحی:

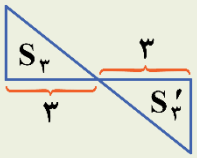
برای آن‌که متحرک از مکان $x_0 = 10m$ به مکان $x = 136m$ برسد، باید جابه‌جایی $\Delta x = 126m$ را طی کند؛ بنابراین باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که مساحت زیر نمودار از ابتدا تا آن لحظه برابر ۱۲۶m شود.



تشابه (۱):



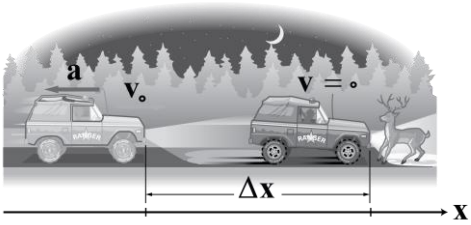
تشابه (۲):



$$x_{۱۲} = x_{۱۸} = ۵۴ + ۷۲ + ۱۰ = ۱۳۶\,m$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۴۷- مطابق شکل، محیط‌بان یک پارک حفاظت‌شده هنگام گشت شبانه، با تندی $۵۴\frac{km}{h}$ در جاده‌ای مستقیم در حرکت است که ناگهان گوزنِ بدون حرکتی را در جلوی خود می‌بیند و ترمز می‌گیرد. حرکت خودرو با شتابی به‌اندازهٔ $۵\frac{m}{s^۲}$ کُند می‌شود تا سرانجام متوقف شود. اگر لحظه‌ای که محیط‌بان ترمز می‌گیرد، گوزن در فاصلهٔ ۲۸ متری از خودرو باشد، خودرو در فاصلهٔ چندمتری از گوزن متوقف می‌شود؟



۱) ۲۲/۵

۲) ۵/۵

۳) ۲۴/۵

۴) ۳/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

برای حل این سؤال از معادلهٔ مستقل از زمان استفاده کن.

از رابطهٔ مستقل از زمان استفاده می‌کنیم و جابه‌جایی خودرو را به‌دست می‌آوریم:

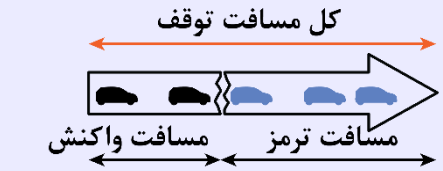
$$v_۰ = ۵۴\frac{km}{h} = \frac{۵۴}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۱۵\frac{m}{s}$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۱۵^۲ = ۲\times(-۵)\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۲۲/۵\,m$$

با توجه به این‌که فاصلهٔ اولیه ۲۸m بوده و خودرو پس از طی ۲۲/۵m متوقف می‌شود، فاصلهٔ نهایی خودرو تا گوزن برابر ۵/۵m = ۲۸ − ۲۲/۵ است.

بررسی مسائل ترمز و توقف

مسائل توقف از دو قسمت تشکیل می‌شوند:



کل مسافت توقف=مسافت ترمز + مسافت واکنش

۱- قبل از ترمز (زمان واکنش راننده):

از زمانی که راننده یک مانع را می‌بیند، تا زمانی که پدال ترمز را فشار دهد، مدتی طول می‌کشد که به این زمان، زمان واکنش (عکس‌العمل) راننده می‌گویند. در این مدت راننده هنوز ترمز نکرده و خودرو با همان سرعت اولیه حرکت می‌کند.

$$\Delta x_{\text{واکنش}} = v_۰\Delta t_{\text{واکنش}}$$

۲- پس از ترمز (کندشدن):

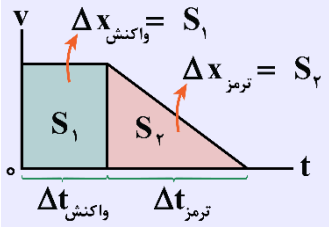
در این مدت، حرکت خودرو با شتاب ثابت a کند می‌شود. زمان و مسافت طی‌شده در هنگام ترمز برابر است با:

$$\Delta x_{\text{ترمز}} = \frac{v_۰^۲}{|۲a|} \quad \text{و} \quad \Delta t_{\text{ترمز}} = \frac{v_۰}{|a|}$$

۳- کل مسافتی که خودرو طی می‌کند تا متوقف شود برابر مجموع مسافت طی‌شده در دو مرحلهٔ قبل است:

$$\Delta x_{\text{توقف}} = \Delta x_{\text{واکنش}} + \Delta x_{\text{ترمز}} = v_{\circ}\Delta t_{\text{واکنش}} + \frac{v_{\circ}^{۲}}{|۲a|}$$

۴- گاهی برای بررسی مسائل ترمز، می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را نیز رسم کنیم.



آزمون سراسری ریاضی ۱۳۹۶

اتومبیلی روی یک خط راست با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ درحال حرکت است. راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ ۱۶۵m، با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^{۲}}$ ترمز می‌کند و درست جلوی مانع می‌ایستد. اگر زمان واکنش راننده $t_۱$ و زمانی که حرکت اتومبیل کندشونده بوده، $t_۲$ باشد، $\frac{t_۲}{t_۱}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ تشریحی:

گام اول:

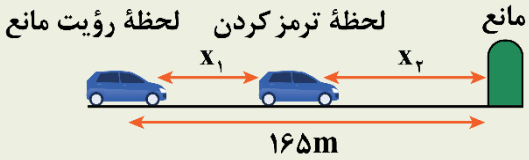
الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت $۱۰۸\frac{km}{h}$ درحال حرکت است. $\leftarrow v_{\circ} = ۱۰۸\frac{km}{h} = \frac{۱۰۸}{۳/۶} = ۳۰\frac{m}{s}$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ ۱۶۵m $\leftarrow$ ۱۶۵m = فاصلهٔ اتومبیل از مانع در لحظهٔ دیدن آن

پ) با شتاب ثابت $۳\frac{m}{s^{۲}}$ ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد $\leftarrow a = -۳\frac{m}{s^{۲}}$

گام دوم:

با توجه به شکل زیر و معادلهٔ سرعت ـ زمان خواهیم داشت:



$$x_۲ = \frac{-v_{\circ}^{۲}}{۲a} = \frac{-(۳۰)^{۲}}{-۲\times ۳} = ۱۵۰\text{m}$$

$$x_۱ = ۱۶۵ - x_۲ = ۱۶۵ - ۱۵۰ = ۱۵\text{m}$$

$$v = \frac{x_۱}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۲}\text{s}$$

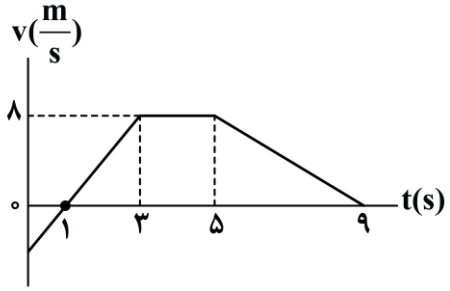
$$v = at_۲ + v_{\circ} \Rightarrow ۰ = -۳\times t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰\text{s}$$

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲۰$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

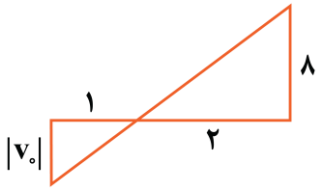
۴۸- نمودار سرعت ـ زمان زیر، مربوط به متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر متحرک در مبدأ زمان از $x_0 = -10m$ عبور کند، در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه متحرک از مکان $x = 24m$ می‌گذرد؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

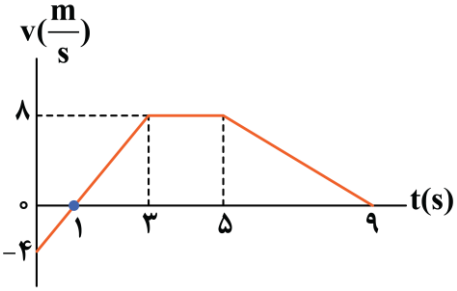
پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

با استفاده از تشابه دو مثلث، v_0 را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{|v_0|}{8} = \frac{1}{2} \xrightarrow{v_0<0} v_0 = -4\frac{m}{s}$$

مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t برابر با جابه‌جایی است؛ درنتیجه داریم:



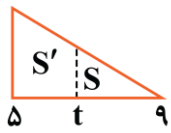
$$\Delta x_{0-1} = -\frac{1}{2}(1\times 4) = -2m$$

$$\Delta x_{1-3} = \frac{1}{2}(2\times 8) = 8m$$

$$\Delta x_{3-5} = 2\times 8 = 16m$$

$$\Delta x_{5-9} = \frac{1}{2}(4\times 8) = 16m$$

طبق اطلاعات متن سؤال، $\Delta x = 24-(-10) = 34m$ است که اگر Δxهای بالا را جمع کنیم $(\Delta x_{0-9} = -2+8+16+16 = 38m)$ می‌توان فهمید که باید این اتفاق در بازهٔ ۵s تا ۹s رخ دهد و باید بعد از لحظهٔ $t = 5s$ به‌اندازهٔ ۱۲m جابه‌جا شویم. ضمناً طبق اطلاعات ریاضی می‌دانیم برای دو مثلث متشابه، نسبت مساحت مثلث‌ها با نسبت مربع اضلاع برابر است؛ درنتیجه داریم:



$$S' = 12m$$

$$S = 16-12 = 4m$$

$$\frac{S+S'}{S} = \left(\frac{9-5}{9-t}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{4} = \left(\frac{4}{9-t}\right)^2 \Rightarrow t = 7s$$

۴۹- هواپیمایی مسافربری روی باند فرودگاه می‌نشیند و با شتاب ثابت، سرعت خود را کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر هواپیما در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت خود، مسافت ۶/۲۵m را طی کرده باشد، ۲۵ متر پایانی مسیر را در چند ثانیه طی کرده است؟

۱) ۲۰
۲) ۴
۳) ۱۶
۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

کلام اول

در حرکت با شتاب ثابت که منجر به توقف می‌شود، اندازهٔ جابه‌جایی با مجذور زمان رابطهٔ مستقیم دارد:

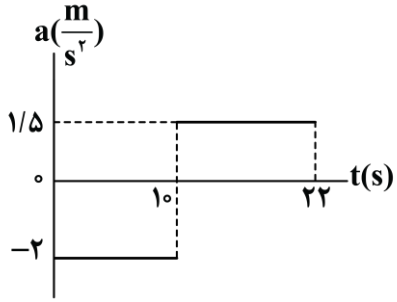
$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + \cancel{vt}^{0} \Rightarrow \Delta x \propto t^2$$

به کمک این تناسب داریم:

$$\frac{\Delta x_۲}{\Delta x_۱}=(\frac{\Delta t_۲}{\Delta t_۱})^۲ \Rightarrow \frac{۲۵}{۶/۲۵}=(\frac{\Delta t_۲}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{۲۵}{۶/۲۵}=\frac{\Delta t_۲^۲}{۴} \Rightarrow \Delta t_۲=۴s$$

ماز

۵۰- نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_۰=(۸\frac{m}{s})\vec{i}$ بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. کدام گزینه در مورد حرکت این متحرک درست است؟



۱) متحرک ۱۰ ثانیه به‌صورت کندشونده حرکت کرده است.

۲) متحرک ۱۲ ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است.

۳) در لحظهٔ $t=۱۰s$ جهت حرکت متحرک عوض شده است.

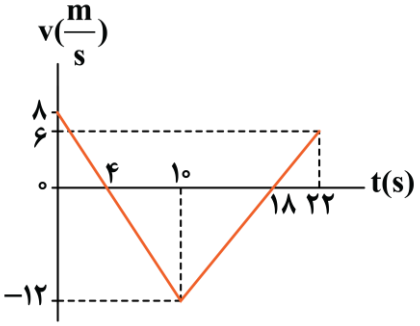
۴) جهت حرکت متحرک دو بار عوض شده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

با استفاده از مساحت محصور نمودار شتاب ـ زمان با محور زمان، تغییرات سرعت رو به‌دست بیار. بعدش نمودار سرعت ـ زمان رو رسم کن و گزینه‌ها رو بررسی کن.

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت اولیهٔ متحرک $+۸\frac{m}{s}$ است؛ بنابراین با شتاب $-۲\frac{m}{s^۲}$ بعد از ۴ ثانیه سرعت آن به صفر می‌رسد و ۶ ثانیه بعد از آن، یعنی در لحظهٔ $t=۱۰s$، سرعت آن به $-۱۲\frac{m}{s}$ می‌رسد. پس از آن، شتاب متحرک $+۱/۵\frac{m}{s^۲}$ می‌شود که بعد از ۸s، یعنی در لحظهٔ $t=۱۸s$، به سرعت آن $۸\times ۱/۵=۱۲\frac{m}{s}$ اضافه شده و سرعت آن به صفر می‌رسد. در ادامه، در مدت ۴s به‌اندازهٔ $۴\times ۱/۵=۶\frac{m}{s}$ به سرعت آن اضافه شده و در لحظهٔ $t=۲۲s$، سرعت آن به $۶\frac{m}{s}$ می‌رسد.



بررسی گزینه‌ها:

۱) حرکت متحرک در بازه‌های زمانی صفر تا ۴s و ۱۰s تا ۱۸s کندشونده است؛ زیرا در این بازه‌ها، اندازهٔ سرعت متحرک کاهش می‌یابد؛ بنابراین مجموعاً ۱۲ ثانیه حرکت متحرک کندشونده است. (✗)

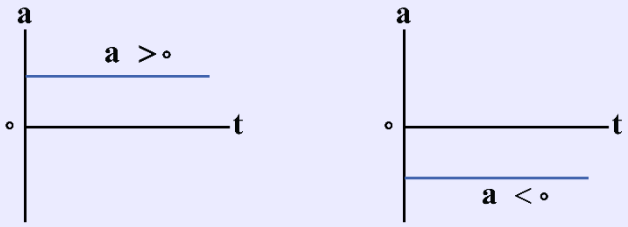
۲) در بازه‌های زمانی صفر تا ۴s و ۱۸s تا ۲۲s، سرعت متحرک مثبت است؛ بنابراین حرکت متحرک مجموعاً به مدت ۸s در جهت محور x است. (✗)

۳) در لحظهٔ $t=۱۰s$ جهت شتاب متحرک عوض شده است. (✗)

۴) در لحظات $t=۴s$ و $t=۱۸s$ که سرعت تغییر علامت می‌دهد، جهت حرکت متحرک عوض شده است. (✓)

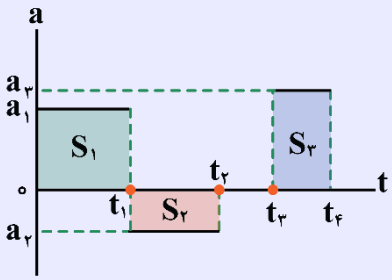
نمودار شتاب ـ زمان حرکت شتاب ثابت

نمودار شتاب ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت، **خطی افقی** موازی با محور زمان است که بسته به علامت شتاب، به یکی از دو صورت زیر است:



نمودار شتاب ـ زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب ـ زمان خطی موازی محور زمان است. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازهٔ زمانی با بازهٔ دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار مانند شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی برابر است:



$$\Delta v = +S_1 - S_2 + S_3$$

در بازهٔ t_2 تا t_3، شتاب صفر است.

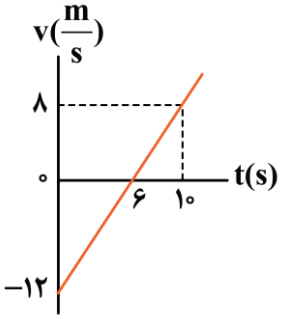
۵۱- معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x در حرکت است، در SI به‌صورت $v = 2t - 12$ است. اگر در مکان‌های منفی، فقط به مدت‌زمان ۴s، متحرک در جهت محور x در حرکت باشد، در مبدأ زمان متحرک در چندمتری مبدأ مکان بوده است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۱۴ ۴) صفر

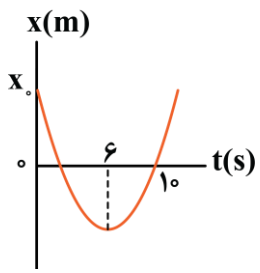
پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

با استفاده از ریشهٔ $v-t$، لحظهٔ تغییر جهت حرکت رو به‌دست بیار و بعدش به کمک بازهٔ زمانی ۴s بعد از لحظهٔ تغییر جهت، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان که در آن $x = 0$ است رو به‌دست بیار. درنهایت با داشتن شتاب و سرعت اولیه از معادلهٔ $v-t$ و یکی از ریشه‌های $x-t$، معادلهٔ $x-t$ و x_0 رو به‌دست بیار.



با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در لحظهٔ ۶s، تغییر جهت داده و از ۶s به بعد در جهت محور x حرکت کرده است؛ بنابراین متحرک باید در بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۰s در مکان‌های منفی و در جهت محور x حرکت کند تا حداکثر به مدت ۴s در مکان‌های منفی و در جهت محور x در حرکت باشد و از لحظهٔ ۱۰s به بعد در مکان‌های مثبت و در جهت محور x به حرکت خود ادامه دهد؛ درنتیجه باید نمودار مکان ـ زمان متحرک به شکل زیر باشد:



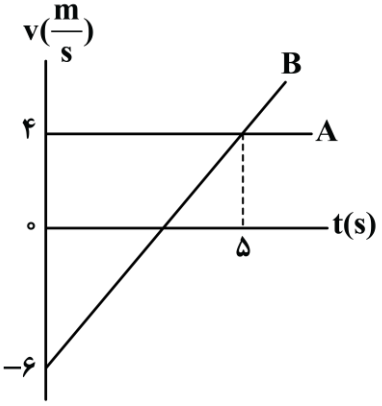
$$v = 2t - 12 \xrightarrow{v=at+v_0} a = 2\frac{m}{s^2},\ v_0 = -12\frac{m}{s}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = t^2 - 12t + x_0 \xrightarrow{x_{10s}=0} 0 = 100 - 120 + x_0$$

$$\Rightarrow x_0 = 20m$$

البته با توجه به تقارن سهمی، می‌توانیم با $x_{2s} = 0$ نیز مقدار x_0 را به‌دست آوریم.

۵۲- شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که روی محور x حرکت می‌کنند و هر دو در مبدأ زمان از یک مکان می‌گذرند. در ۲۰ ثانیهٔ نخست حرکت، چند بار فاصلهٔ بین این دو متحرک ۲۴m می‌شود؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

راه نجات سریع

از روی نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک، سرعت متحرک A، شتاب و سرعت اولیهٔ متحرک B رو به‌دست بیار. بعدش معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک رو بنویس. درنهایت تعداد جواب‌های قابل‌قبول معادلهٔ قدر مطلقی رو پیدا کن.

کام اول

معادلات مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

متحرک A به‌صورت سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ پس:

$$x_A = v_A t + x_0 \Rightarrow x_A = 4t + x_0$$

متحرک B به‌صورت شتاب ثابت حرکت می‌کند؛ پس:

$$x_B = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

همچنین شتاب متحرک B را از رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{4 - (-6)}{5} = 2\frac{m}{s^2}$$

$$x_B = t^2 - 6t + x_0$$

کام آخر

فاصلهٔ دو متحرک را برابر ۲۴ متر قرار می‌دهیم:

$$|x_B - x_A| = 24 \Rightarrow |t^2 - 6t + \cancel{x_0} - 4t - \cancel{x_0}| = 24 \Rightarrow |t^2 - 10t| = 24$$

حالت اول

$$t^2 - 10t = 24 \Rightarrow t^2 - 10t - 24 = 0 \Rightarrow (t-12)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 12s & \text{قابل قبول} \\ t = -2s & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

حالت دوم

$$t^2 - 10t = -24 \Rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0 \Rightarrow (t-4)(t-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 4s & \text{قابل قبول} \\ t = 6s & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

در سه لحظهٔ $t_1 = 4s$ و $t_2 = 6s$ و $t_3 = 12s$ فاصلهٔ دو متحرک ۲۴ متر است.

حرکت دو متحرک با شتاب ثابت چگونه بررسی می‌شود؟

گاهی در سؤالات می‌خواهیم حرکت دو متحرک را بررسی کنیم که یکی از آن‌ها یا هر دو با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. برای بررسی این‌گونه سؤالات، معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم و از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

۱- اگر متحرک با سرعت ثابت حرکت کند، معادلهٔ مکان ـ زمان آن را به‌صورت $x = vt + x_0$ می‌نویسیم و اگر متحرک با شتاب ثابت حرکت کند، معادلهٔ مکان ـ زمان آن را به‌صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ می‌نویسیم.

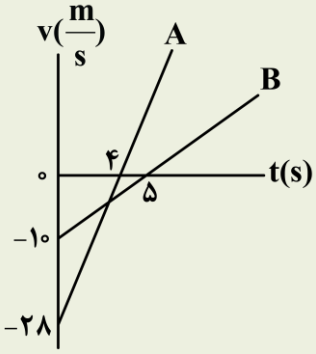
۲- اگر لحظهٔ **به‌هم رسیدن** دو متحرک را بخواهیم، معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را باهم **مساوی** قرار می‌دهیم. $(x_A = x_B)$

۳- اگر **فاصلهٔ دو متحرک** را بخواهیم، **قدر مطلق اختلاف مکان** آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. $(d = |x_A - x_B|)$

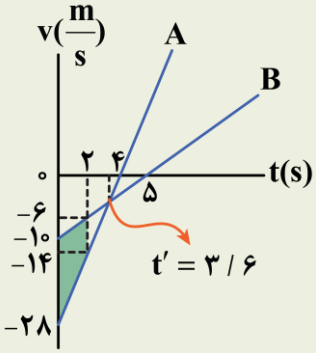
آزمون سراسری تجربی ۱۴۰۵

۴۹- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی یک خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = 0s$ متحرک B از مبدأ محور و متحرک A از مکان $\vec{x}_0 = (+50m)\vec{i}$ عبور کنند، در لحظهٔ $t = 2s$، فاصلهٔ دو متحرک از هم چند متر است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۲۳
۴) ۲۴



پاسخ تشریحی:



$$\begin{cases} a_A = \frac{28}{4} = 7\frac{m}{s^2} \Rightarrow v_A = a_At + v_{0A} = 7t - 28 \\ a_B = \frac{10}{5} = 2\frac{m}{s^2} \Rightarrow v_B = 2t - 10 \end{cases}$$

در لحظهٔ $t = 2s$ سرعت متحرک A و B برابر است با:

$$v_A = 7t - 28 = 7 \times 2 - 28 = 14 - 28 = -14\frac{m}{s}$$

$$v_B = 2t - 10 = 2 \times 2 - 10 = 4 - 10 = -6\frac{m}{s}$$

در ۲ ثانیهٔ اول، جابه‌جایی دو متحرک نسبت به‌هم برابر است با:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = (\frac{18 + 8}{2}) \times 2 = 26m$$

فاصلهٔ اولیهٔ بین دو متحرک در لحظهٔ $t = 0$ برابر با $50m$ است، با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی $t = 0$ تا $t = 2s$ نمودار B بالاتر از نمودار A است، پس متحرک B به متحرک A نزدیک‌تر شده است، پس فاصلهٔ بین آن‌ها در لحظهٔ $t = 2s$ برابر با $50 - 26 = 24m$ است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

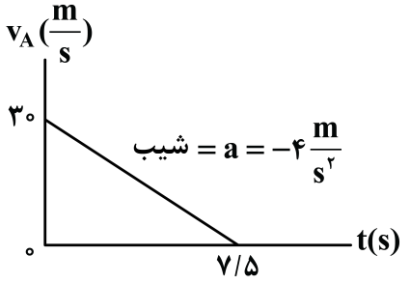
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۵۳- در یک مسیر مستقیم، خودروی A با تندی ثابت $۱۰۸\frac{km}{h}$ در حرکت است و به فاصلهٔ ۵۵ متر پشت سر آن، خودرو B نیز در همان جهت و با همان تندی حرکت می‌کند. در یک لحظه خودرو A با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ سرعت خود را کاهش می‌دهد و ۲ ثانیه بعد، رانندهٔ خودروی B با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند. در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو متحرک به ۷m می‌رسد، تندی متحرک B چند برابر تندی متحرک A است؟

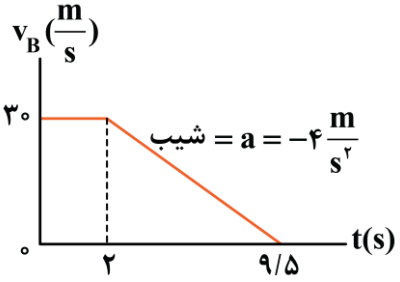
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

برای آن‌که فاصلهٔ دو متحرک از ۵۵m به ۷m برسد، متحرک B باید ۴۸m بیش‌تر از متحرک A جابه‌جا شود؛ بنابراین اگر نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک را رسم کنیم، باید مساحت بین دو نمودار تا لحظهٔ موردنظر برابر ۴۸m باشد.

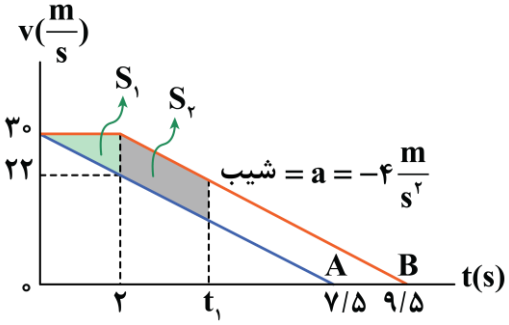


متحرک A در لحظهٔ $t = ۰$ با شتاب $a_A = -۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌گیرد و سرعت اولیهٔ آن $v_۰ = ۱۰۸\frac{km}{h} = ۳۰\frac{m}{s}$ است.



متحرک B در لحظهٔ $t = ۲s$ با شتاب $a_B = -۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌گیرد و سرعت اولیهٔ آن $v_۰ = ۱۰۸\frac{km}{h} = ۳۰\frac{m}{s}$ است.

اگر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، داریم:



$$S_۱ + S_۲ = ۴۸m \Rightarrow \frac{۸ \times ۲}{۲} + ۸(t_۱ - ۲) = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۸ + ۸t_۱ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow t_۱ = ۷s$$

درنهایت در لحظهٔ $t_۱ = ۷s$، سرعت دو متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v_A = a_A t + v_{۰A} = -۴t + ۳۰ \xrightarrow{t_۱ = ۷s} v_A = -۴ \times ۷ + ۳۰ = ۲\frac{m}{s}$$

$$v_B = a_B(t-۲) + v_{۰B} = -۴(t-۲) + ۳۰ \xrightarrow{t_۱ = ۷s} v_B = -۴(۷-۲) + ۳۰ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت خواسته‌شده} = \frac{v_B}{v_A} = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

راهنمای مسیرت

اگه سر جلسهٔ آزمون زمان اضافه آوردی، سراغ این سؤال برو چون قراره خیلی وقتتو بگیره.

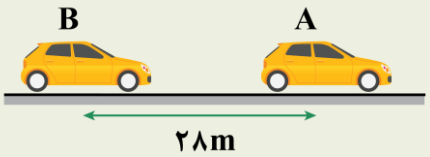
آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۵

۴۷- در یک مسیر مستقیم، خودرو A با تندی ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ در حرکت است و به فاصلهٔ ۲۸ متر پشت سر آن خودرو B نیز با همان تندی حرکت می‌کند. در یک لحظه خودرو A با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ سرعت خود را کاهش می‌دهد و ۲ ثانیه بعد رانندهٔ خودروی B با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند. تندی خودروی B موقع رسیدن به خودروی A چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ تشریحی:

در $t=۰$ متحرک B، ۲۸ متر عقب‌تر است:



وقتی به‌هم می‌رسند که جابه‌جایی متحرک B، ۲۸ متر بیش‌تر باشد:

$$d_A=\frac{۱}{۲}a_At^۲+v_{۰}t\Rightarrow d_A=-۲t^۲+۲۰t$$

$$d_B=(۲\times ۲۰)+(-۲(t-۲)^۲+۲۰(t-۲))=-۲t^۲+۲۸t-۸$$

$$\Rightarrow d_B=d_A+۲۸\Rightarrow -۲t^۲+۲۸t-۸=-۲t^۲+۲۰t+۲۸$$

$$\Rightarrow ۸t=۳۶\Rightarrow t=۴/۵s$$

$$v_B=a_Bt+v_{۰B}\Rightarrow v_B=۲۰+(\overbrace{-۴}^{a}(\underbrace{t-۲}_{۲/۵}))=۱۰\frac{m}{s}$$

دقت کنید در بررسی حرکت شتاب‌دار متحرک B، زمان را برابر با $t-۲$ جایگذاری کردیم، زیرا این متحرک ۲ ثانیه دیرتر ترمز گرفته است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

۵۴- **سنگی را در شرایط خلأ از ارتفاع ۶۱/۲۵ متری از سطح زمین رها می‌کنیم. این سنگ ۰/۷ ثانیه قبل از رسیدن به زمین از ارتفاع چندمتری سطح زمین عبور می‌کند؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$**

۱) ۲۰/۱۲ ۲) ۲۲/۰۵ ۳) ۲۴/۶ ۴) ۲۶/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

کلام اول

مدت‌زمان کل سقوط را محاسبه می‌کنیم:

$$h=\frac{۱}{۲}gt_{کل}^۲\Rightarrow ۶۱/۲۵=۵t_{کل}^۲\Rightarrow t_{کل}^۲=۱۲/۲۵\Rightarrow t_{کل}=۳/۵s$$

کلام دوم

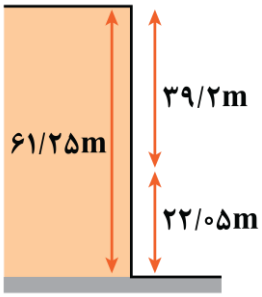
محاسبهٔ مسافت طی‌شده تا لحظهٔ موردنظر:

$$t=۳/۵-۰/۷=۲/۸s$$

$$|\Delta y|=\frac{۱}{۲}gt^۲=۵\times(۲/۸)^۲=۳۹/۲m$$

کلام آخر

محاسبهٔ ارتفاع از سطح زمین:

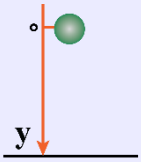


$h' = ۶۱/۲۵ - ۳۹/۲ = ۲۲/۰۵m$

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند، درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد می‌گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رهاشدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین فرض می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب، مکان و سرعت در هرلحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رهاشدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{۱}{۲}gt^۲ + v_۰t + y_۰ \xrightarrow[v_۰=۰]{y_۰=۰} y = \frac{۱}{۲}gt^۲$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_۰ \xrightarrow{v_۰=۰} v = gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲g\Delta y \xrightarrow[y_۰=۰]{v_۰=۰} v^۲ = ۲gy$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{۱}{۲}gt$$

تکنیک دهدهی: اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ و بدون سرعت اولیه از ارتفاع معینی رها کنیم و $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ باشد، گلوله در ثانیهٔ اول ۵ متر، در ثانیهٔ دوم ۱۵ متر، در ثانیهٔ سوم ۲۵ متر و ... جابه‌جا می‌شود. همچنین تندی گلوله در لحظهٔ ۱s، $۱۰\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۲s، $۲۰\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۳s، $۳۰\frac{m}{s}$ و ... است.

نکته

در سقوط آزاد، اندازهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر است با $v = gt$ که اگر $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ باشد، همان $v = ۱۰t$ خواهد بود.

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۴۵- از نقطه‌ای به ارتفاع h هر دو ثانیه یک گلوله رها می‌شود. اگر در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین برسد، در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع چندمتری عبور می‌کند؟ ($g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ تشریحی:

در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین می‌رسد؛ بنابراین زمان سقوط گلولهٔ A برابر است با:

$$t_A = ۲ + ۲ = ۴s$$

ارتفاع h را به کمک رابطهٔ $h = \frac{۱}{۲}gt^۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$h_A = \frac{۱}{۲}gt_A^۲ \Rightarrow h_A = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۴^۲ = ۸۰m$$

در لحظهٔ رسیدن گلولهٔ اول به زمین، از سقوط گلولهٔ دوم، ۲s می‌گذرد. در این مدت مسافت سقوط آن برابر است با:

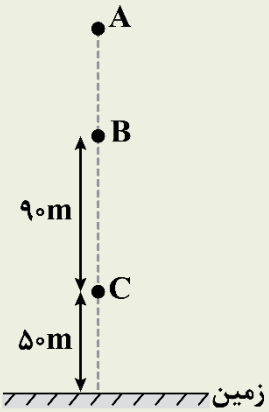
$$\Delta y_B = \frac{۱}{۲}gt_B^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲^۲ = ۲۰m$$

درنتیجه در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع ۸۰m، به‌اندازهٔ ۲۰m پایین آمده و در ارتفاع $h_B = h - \Delta y_B = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰m$ قرار دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

آزمون سراسری ریاضی دی‌ماه ۱۴۰۱

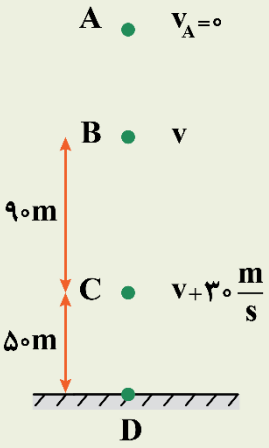
۴۷- گلوله‌ای در شرایط خلأ، از نقطهٔ A رها می‌شود و ۳ ثانیه طول می‌کشد تا فاصلهٔ بین دو نقطهٔ B و C را طی کند. گلوله ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین، از ارتفاع چندمتری عبور می‌کند؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۴۵
۲) ۹۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۵۰

پاسخ تشریحی:

گام اول: فرض کنیم سرعت گلوله در نقطهٔ B برابر v باشد، در این صورت با توجه به این‌که در هر ثانیه $۱۰\frac{m}{s}$ بر سرعت به سمت پایین اضافه می‌شود، سرعت در ۳ ثانیهٔ بعد، در نقطهٔ C برابر $v + ۳۰\frac{m}{s}$ خواهد شد. با نوشتن معادلهٔ مستقل از شتاب در فاصلهٔ B تا C داریم:



فاصلهٔ B تا C: $\Delta y = \frac{v_B + v_C}{۲}\Delta t$

$$\Rightarrow ۹۰ = \frac{v + v + ۳۰}{۲} \times ۳$$

$$\Rightarrow ۶۰ = ۲v + ۳۰ \Rightarrow v = ۱۵\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت در نقطهٔ B برابر $v_B = ۱۵\frac{m}{s}$ و در نقطهٔ C برابر $v_C = ۴۵\frac{m}{s}$ است.

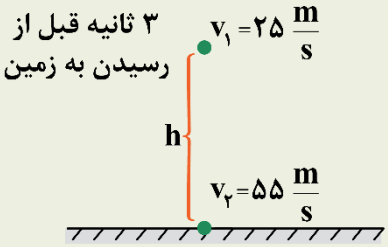
گام دوم: با نوشتن معادلهٔ مستقل از زمان، سرعت گلوله را در هنگام رسیدن به زمین به‌دست می‌آوریم:

$$v_D^2 - v_C^2 = 2g\Delta y \Rightarrow v_D^2 - 45^2 = 2\times 10\times 50$$

$$\Rightarrow v_D^2 = 3025 \Rightarrow v_D = 55\frac{m}{s}$$

بنابراین ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین، سرعت گلوله برابر $25\frac{m}{s}$ $55 - 3\times 10 = 25\frac{m}{s}$ بوده است.

گام سوم: با نوشتن معادلهٔ مستقل از شتاب از ۳ ثانیه قبل از رسیدن به زمین تا رسیدن به زمین داریم:



$$\Delta y = \frac{v_1 + v_2}{2}\Delta t$$

$$\Rightarrow h = \frac{25 + 55}{2}\times 3 = 120m$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

۵۵- گلولهٔ A از ارتفاع H و ۴ ثانیه بعد، گلولهٔ B از ارتفاع $\frac{H}{25}$ از سطح زمین رها می‌شوند. اگر دو گلوله هم‌زمان به زمین برسند، تندی گلولهٔ A هنگام برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.)

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

گام اول

در حرکت سقوط آزاد $|\Delta y| = \frac{1}{2}gt^2$ است؛ پس نسبت زمان‌های سقوط برابر است با:

$$\frac{t_B}{t_A} = \sqrt{\left|\frac{\Delta y_B}{\Delta y_A}\right|} = \sqrt{\frac{\frac{H}{25}}{H}} = \frac{1}{5} \Rightarrow t_A = 5t_B \quad (*)$$

گام دوم

محاسبهٔ زمان سقوط هر گلوله:

$$t_A - t_B = 4 \xrightarrow{\text{معادلهٔ } (*)} 5t_B - t_B = 4 \Rightarrow 4t_B = 4 \Rightarrow t_B = 1s \Rightarrow t_A = 5s$$

گام آخر

محاسبهٔ تندی برخورد گلولهٔ A به زمین:

$$|v_A| = gt_A = 10\times 5 = 50\frac{m}{s}$$

۵۶- یک ماهواره به جرم 6×10^3 کیلوگرم با سرعت ۷ کیلومتر بر ثانیه درحال چرخش به دور زمین است. اگر این ماهواره به‌دلیل خرابی سامانه، با یک تکه زبالهٔ فضایی برخورد کند و کاملاً از حرکت بایستد (تمام انرژی جنبشی آزاد شود)، این انرژی معادل چند تن TNT است؟ (انرژی حاصل از انفجار هر تن TNT برابر $4/2\times 10^9$ ژول است.)

۱) ۲۱ ۲) ۲۸ ۳) ۳۵ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۰۰۳)

کام اول

طبق رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$، انرژی جنبشی ماهواره را محاسبه می‌کنیم:

$$K=\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰^۳\times(۷\times ۱۰^۳)^۲=۳\times ۴۹\times ۱۰^۹\,J$$

کام آخر

با استفاده از تبدیل یکای زنجیره‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$E=۳\times ۴۹\times ۱۰^۹\,J\times\frac{۱\ \text{تن TNT}}{۴/۲\times ۱۰^۹\,J}=۳۵\ \text{تن TNT}$$

این انرژی معادل ۳۵ تن TNT است.

انرژی جنبشی و تغییر انرژی جنبشی

۱- انرژی جنبشی از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ به‌دست می‌آید.

۲- تغییر انرژی جنبشی را می‌توان از رابطهٔ $K_۲-K_۱=\frac{۱}{۲}m(v_۲^۲-v_۱^۲)$ محاسبه کرد.

۳- برای آن‌که انرژی جنبشی یا تغییر انرژی جنبشی برحسب ژول (J) باشد، باید جرم جسم برحسب کیلوگرم (kg) و تندی‌های آن برحسب متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ باشد.

آزمون سراسری ریاضی دی‌ماه ۱۴۰۱

۷۱- اگر تندی جسمی را از $۲\frac{m}{s}$ به $۶\frac{m}{s}$ برسانیم، انرژی جنبشی آن ۴ ژول افزایش می‌یابد. جرم جسم چند گرم است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۲۵۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ تشریحی:

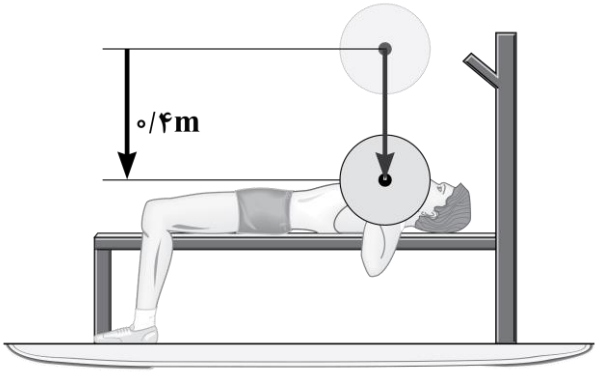
با استفاده از رابطهٔ تغییر انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K=\frac{۱}{۲}m\left(v_۲^۲-v_۱^۲\right)=\frac{۱}{۲}m\left(۶^۲-۲^۲\right)=۴\ \Rightarrow\ ۱۶m=۴\Rightarrow\ m=\frac{۱}{۴}kg=۲۵۰g$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۵۷- در شکل زیر، ورزشکاری وزنهٔ ۶۰ کیلوگرمی را با تندی ثابت به‌اندازهٔ ۴۰cm به سمت پایین جابه‌جا می‌کند. کار نیروی دست ورزشکار در این جابه‌جایی برحسب ژول کدام است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$



۱) ۲۴۰

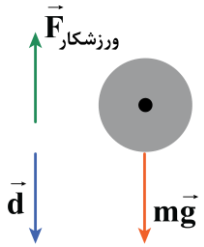
۲) ۴۸۰

۳) −۲۴۰

۴) −۴۸۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۳)

باید حتماً دقت کنید که وقتی وزنه به طرف پایین جابه‌جا می‌شود، به این معنی نیست که نیروی دست ورزشکار به سمت پایین است! بلکه نیرویی هم‌اندازه با وزن جسم به سمت بالا از طرف ورزشکار به جسم وارد می‌شود.



$$F_{\text{ورزشکار}} = mg = ۶۰ \times ۱۰ = ۶۰۰N$$

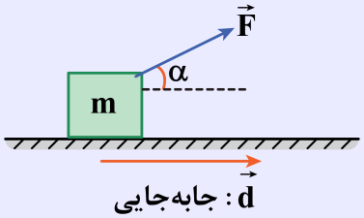
$$W = F_{\text{ورزشکار}} \times d \times \cos\theta$$

$$\xrightarrow{\theta = ۱۸۰^\circ} W = ۶۰۰ \times \frac{۴}{۱۰} \times \cos ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow W = ۶۰۰ \times \frac{۴}{۱۰} \times (-۱) = -۲۴۰J$$

محاسبهٔ کار

۱- هنگامی که مطابق شکل زیر، نیروی F به یک جسم وارد شود و آن را به‌اندازهٔ d جابه‌جا کند، کار نیروی F برابر است با:



$$W = Fd\cos\alpha$$

در رابطهٔ فوق، F نیروی وارد بر جسم، d جابه‌جایی آن و α زاویهٔ بین نیرو و جابه‌جایی است.

۲- مطابق رابطهٔ $W = Fd\cos\alpha$، هر ژول معادل متر×نیوتون است.

۳- با توجه به زاویهٔ α، کار انجام‌شده می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد.

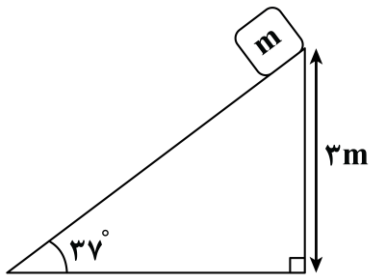
$$۰ \le \alpha < ۹۰^\circ \Rightarrow \cos\alpha > ۰ \Rightarrow W > ۰$$

$$\alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \cos\alpha = ۰ \Rightarrow W = ۰$$

$$۹۰^\circ < \alpha \le ۱۸۰^\circ \Rightarrow \cos\alpha < ۰ \Rightarrow W < ۰$$

۵۸- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = ۲kg$ از بالای سطح شیب‌دار به پایین سطح می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی اصطکاک در این مسیر $\frac{۱}{۵}$ بزرگی وزن جسم باشد، کار نیروی اصطکاک و کار نیروی وزن در این جابه‌جایی به‌ترتیب از راست به چپ چند ژول است؟

$(\sin ۳۷^\circ = ۰/۶ , g = ۱۰\frac{N}{kg})$



۱) -۲۵ و ۶۰

۲) -۲۰ و ۶۰

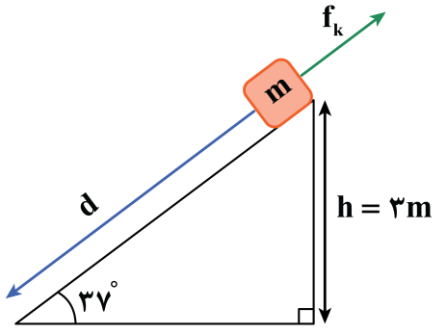
۳) -۲۵ و ۱۰۰

۴) -۲۰ و ۱۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۰۰۳)

کلام اول

جابه‌جایی جسم روی سطح شیب‌دار را محاسبه می‌کنیم:



$$\sin ۳۷^\circ = \frac{h}{d} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{۳}{d} \Rightarrow d = \frac{۳}{۰/۶} = ۵m$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام دوم

کار نیروی اصطکاک را در این جابه‌جایی محاسبه می‌کنیم:

$$W_{f_k} = f_k d\cos\theta$$

$$\xrightarrow[f_k=\frac{۱}{۵}mg\ ,m=۲kg\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}]{\theta=۱۸۰^\circ\ ,\cos\theta=-۱\ ,\ d=۵m} W_{f_k}=\frac{۱}{۵}\times۲\times۱۰\times۵\times(-۱)=-۲۰J$$

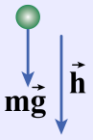
گام آخر

چون جسم رو به پایین حرکت می‌کند، کار نیروی وزن روی جسم، مثبت است. می‌دانیم که کار نیروی وزن جسم فقط به وزن آن و تغییر ارتفاع بستگی دارد و به مسیر حرکت بستگی ندارد؛ بنابراین کار نیروی وزن در این جابه‌جایی برابر است با:

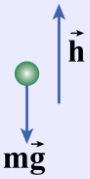
$$W_{mg}=+mgh \xrightarrow[h=۳m]{m=۲kg\ ,\ g=۱۰\frac{N}{kg}} W_{mg}=۲\times۱۰\times۳=۶۰J$$

محاسبهٔ کار نیروهای خاص

۱- نیروی وزن: برای محاسبهٔ کار نیروی وزن، کافی است که فقط جابه‌جایی جسم در راستای قائم را درنظر بگیریم. اگر جسم به‌اندازهٔ h پایین بیاید، کار نیروی وزن برابر $W_{mg}=+mgh$ است و اگر به‌اندازهٔ h بالا برود، کار نیروی وزن برابر $W_{mg}=-mgh$ خواهد بود.



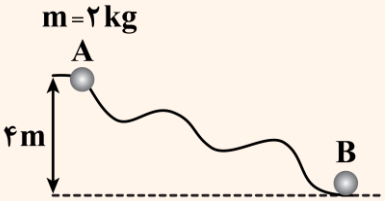
W= + mgh



W= - mgh

یه نمونهٔ باحال

کار نیروی وزن در جابه‌جایی جسم از نقطهٔ A تا نقطهٔ B چند ژول است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$



پاسخ تشریحی:

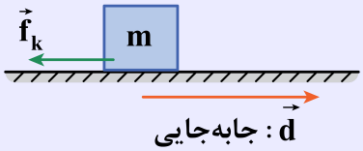
جسم به‌اندازهٔ ۴m پایین آمده است؛ بنابراین داریم:

$$W=+mgh=+۲\times۱۰\times۴=۸۰J$$

تذکر!

کار نیروی وزن به مسیر جابه‌جایی جسم وابسته نیست و فقط به این‌که جسم چقدر بالا یا پایین رفته است، ربط دارد.

۲- کار نیروی اصطکاک جنبشی: با توجه به این‌که نیروی اصطکاک جنبشی در خلاف جهت حرکت جسم است، $\cos\alpha=-۱$ خواهد بود و درنتیجه کار آن منفی می‌باشد.



$$W_{f_k}=f_k d\underbrace{\cos۱۸۰^\circ}_{-۱}\Rightarrow W_{f_k}=-f_k d$$

درصورتی‌که نیاز به محاسبهٔ نیروی اصطکاک باشد، می‌توانیم از رابطهٔ $f_k=\mu_k F_N$ که در کتاب دوازدهم آمده است استفاده کنیم.

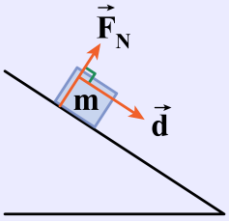
۳- نیروی مقاومت هوا:

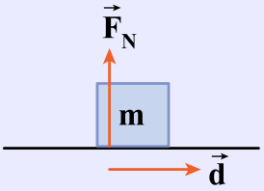
نیروی مقاومت هوا هم مانند اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم است؛ بنابراین کار آن منفی خواهد بود. اگر این نیرو را با f_D نشان دهیم، داریم:

$$W_{f_D}=-f_D d$$

۴- کار نیروی عمودی سطح:

در بیش‌تر مسائل که جسم روی یک سطح صاف یا شیب‌دار حرکت می‌کند، نیروی عمودی سطح بر جابه‌جایی جسم عمود است و درنتیجه کار این نیرو برابر صفر خواهد بود.



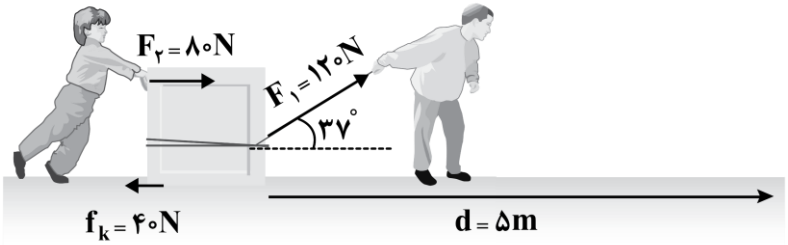


در برخی از مسائل مثل حرکت آسانسور، کار نیروی عمودی سطح صفر نیست. هنگامی که آسانسور به سمت بالا حرکت کند، نیروی عمودی سطح هم‌جهت با جابه‌جایی است و کار آن مثبت می‌باشد و اگر آسانسور پایین برود، کار نیروی عمودی سطح منفی خواهد بود.

$$W_N = \pm F_N d \Rightarrow \begin{cases} \text{حرکت رو به بالا}: W_{F_N} = +F_N d \\ \text{حرکت رو به پایین}: W_{F_N} = -F_N d \end{cases}$$

+ ← آسانسور بالا برود. - ← آسانسور پایین برود.

۵۹- شکل زیر، پدر و پسری را نشان می‌دهد که یک جعبهٔ سنگین را روی سطحی هموار از حال سکون به‌اندازهٔ ۵m جابه‌جا می‌کنند. اگر جرم جعبه ۲۰kg باشد، تندی آن پس از این جابه‌جایی به چند متر بر ثانیه می‌رسد؟ $(\cos 37^\circ = 0/8)$



۱) ۸
۲) $2\sqrt{17}$
۳) $2\sqrt{22}$
۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۴ ـ ۱۰۰۳)

با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، داریم:

$$W_t = K_2 - K_1 \xrightarrow{K_1 = 0} W_t = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow W_{F_1} + W_{F_2} + W_{f_k} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow F_1 d\cos\theta_1 + F_2 d\cos\theta_2 + f_k d\cos\theta_3 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\xrightarrow[f_k = 40N\,,\theta_3 = 180^\circ\,,\ m=20kg\,,\ d=5m]{F_1 = 120N\,,\ \theta_1 = 37^\circ\,,\ F_2 = 80N\,,\ \theta_2 = 0^\circ} 120\times 5\times \cancel{\cos 37^\circ}^{0/8} + 80\times 5\times \cancel{\cos 0^\circ}^{1} + 40\times 5\times \cancel{\cos 180^\circ}^{-1} = \frac{1}{2}\times 20\times v^2$$

$$480 + 400 - 200 = 10v^2 \Rightarrow v^2 = 68 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} v = 2\sqrt{17}\,\frac{m}{s}$$

حواست باشه!

توجه کنید که بر جعبه دو نیروی وزن و نیروی عمودی تکیه‌گاه نیز وارد می‌شود، ولی چون این دو نیرو بر جابه‌جایی عمود هستند، کاری روی آن انجام نمی‌دهند.

کار کل

برای محاسبهٔ کار کل انجام‌شده روی جسم در یک جابه‌جایی، سه روش زیر وجود دارد:

روش ۱: محاسبهٔ کار تک‌تک نیروهای وارد بر جسم به‌طور جداگانه و جمع جبری آن‌ها:

$$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + \cdots$$

روش ۲: محاسبهٔ برایند نیروهای وارد بر جسم $(\vec{F}_t)$ با توجه به قوانین جمع برداری و درنهایت استفاده از رابطهٔ زیر:

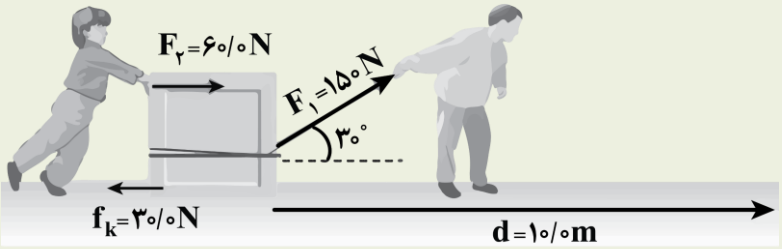
$W_t = F_t d\cos\theta \quad \theta : \vec{d}$ و $\vec{F}_t$ زاویهٔ بین

روش ۳: قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی:

$$W_t = \Delta K = K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

آزمون سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۴

۶۷- در شکل زیر، پدر و پسری درحال جابه‌جا کردن یک جعبهٔ سنگین روی سطحی افقی هستند. کار کل انجام‌شده روی جعبه چند ژول است؟



$(\sqrt{۳} = ۱/۷)$

۱) ۱۰۵

۲) ۱۵۷/۵

۳) ۱۰۵۰

۴) ۱۵۷۵

پاسخ تشریحی:

کار تک‌تک نیروها را به‌دست می‌آوریم و درنهایت همهٔ آن‌ها را به‌صورت جبری جمع می‌کنیم. فقط حواستان باشد که چون نیروهای $m\vec{g}$ و $\vec{F}_N$ عمود بر جابه‌جایی هستند، کاری انجام نمی‌دهند $(W_{mg} = W_{F_N} = ۰)$:

$$W_{F_۱} = F_۱ d\cos\theta_۱ = ۱۵۰\times۱۰\times\cos۳۰^\circ = ۷۵۰\sqrt{۳}\,J \xrightarrow{\sqrt{۳}\simeq ۱/۷} W_{F_۱} \simeq ۷۵۰\times ۱/۷ \simeq ۱۲۷۵J$$

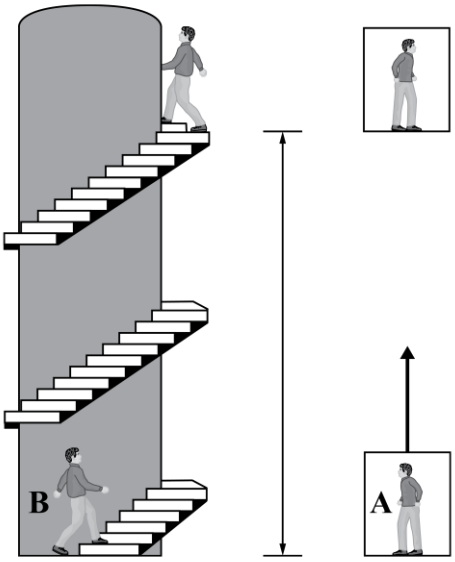
$$W_{F_۲} = F_۲ d\cos\theta_۲ = ۶۰\times۱۰\times\cos۰^\circ = ۶۰۰J$$

$$W_{f_k} = -f_k d = -۳۰\times۱۰ = -۳۰۰J$$

$$\xrightarrow{W_t = W_{F_۱} + W_{F_۲} + W_{f_k}} W_t = ۱۲۷۵ + ۶۰۰ - ۳۰۰ = ۱۵۷۵J$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۶۰- **مطابق شکل زیر، دو شخص هم‌جرم A و B از طبقهٔ اول به طبقهٔ سوم ساختمانی می‌روند. شخص A با آسانسور و شخص B به‌آرامی از پله‌های ساختمان بالا می‌روند. اگر کار نیروی وزن دو شخص را با W_A و W_B و تغییر انرژی پتانسیل گرانشی آن‌ها را با ΔU_A و ΔU_B نشان دهیم، نسبت‌های $\frac{W_A}{W_B}$ و $\frac{\Delta U_A}{\Delta U_B}$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟**



۱) ۱ ،۱

۲) ۱ ،−۱

۳) ۱ ،−۱

۴) −۱ ،−۱

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۰۰۳)

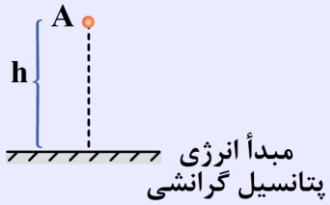
کار نیروی وزن از رابطهٔ $W=-mg\Delta h$ و تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی از رابطهٔ $\Delta U=+mg\Delta h$ به‌دست می‌آید و هیچ‌کدام ربطی به مسیر حرکت ندارند؛ بنابراین با توجه به یکسان بودن جرم دو شخص و Δh برای آن‌ها، $W_A=W_B$ و $\Delta U_A=\Delta U_B$ است.

کار نیروی وزن و انرژی پتانسیل گرانشی

کار نیروی وزن جسم برابر است با منفی (قرینه) تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی آن:

$$W_{mg}=-\Delta U$$

برای محاسبهٔ انرژی پتانسیل گرانشی جسم در یک نقطه، در ابتدا باید مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی که معمولاً سطح زمین انتخاب می‌شود را مشخص کنیم و سپس فاصلهٔ عمودی نقطهٔ موردنظر از مبدأ انرژی پتانسیل را در رابطهٔ زیر قرار دهیم:



$$U_A=mgh$$

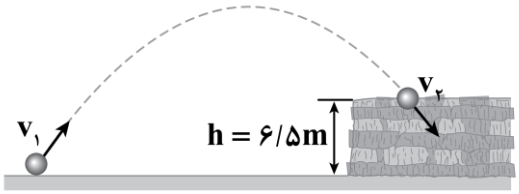
نکات

۱- در محاسبهٔ تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم، تغییرات ارتفاع عمودی جسم، مهم است و مسیر حرکت اهمیتی ندارد.

۲- با تغییر مبدأ پتانسیل گرانشی، انرژی پتانسیل گرانشی اولیهٔ جسم (U_1) و انرژی پتانسیل گرانشی ثانویهٔ جسم (U_2) تغییر می‌کند ولی با توجه به این‌که مقدار تغییرات ارتفاع جسم $(\Delta h=h_2-h_1)$ به مبدأ بستگی ندارد؛ بنابراین تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی $(\Delta U=U_2-U_1)$ نیز به مبدأ پتانسیل گرانشی بستگی ندارد.

ماز

۶۱- توپی به جرم ۸۰۰g مطابق شکل، از سطح زمین با تندی v_1 به طرف صخره‌ای پرتاب می‌شود و با تندی $v_2=15\frac{m}{s}$ به بالای صخره برخورد می‌کند. اگر بزرگی کار نیروی مقاومت هوا روی جسم در این جابه‌جایی برابر ۱۸J باشد، v_1 چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$



۱) $5\sqrt{2}$

۲) ۲۰

۳) ۲۵

۴) $\sqrt{310}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۲ ـ ۱۰۰۳)

با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی داریم:

$$W_t=K_2-K_1\Rightarrow W_f+W_{mg}=K_2-K_1$$

چون توپ رو به بالا حرکت می‌کند، کار نیروی وزن منفی است.

از طرفی کار نیروی مقاومت هوا نیز به‌دلیل این‌که نیروی مقاومت هوا همواره در خلاف جهت حرکت جسم است، منفی است؛ بنابراین داریم:

$$W_f-mgh=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\xrightarrow[h=6/5m\ ,\ v_2=15\frac{m}{s}]{W_f=-18J\ ,\ m=0/8kg\ ,\ g=10\frac{N}{kg}} -18-0/8\times10\times6/5=\frac{1}{2}\times0/8\times(15)^2-\frac{1}{2}\times0/8\times v_1^2$$

$$\Rightarrow -18-52=90-0/4v_1^2\Rightarrow 0/4v_1^2=160\Rightarrow v_1^2=400\Rightarrow v_1=20\frac{m}{s}$$

۶۲- گلوله‌ای را از سطح زمین با تندی اولیهٔ $۲۰\frac{m}{s}$ به طرف بالا شلیک می‌کنیم. در نقطه‌ای که انرژی پتانسیل گرانشی گلوله ۴ برابر انرژی جنبشی آن است، گلوله در ارتفاع چندمتری از سطح زمین قرار دارد؟ ($g=۱۰\frac{m}{s^۲}$، از مقاومت هوا صرف‌نظر و مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، سطح زمین فرض شود.)

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۰ ـ ۱۰۰۳)

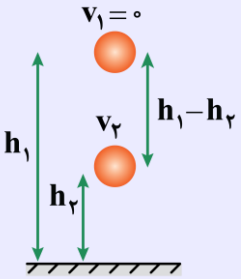
طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$E_۲=E_۱\Rightarrow U_۲+K_۲=U_۱+K_۱\xrightarrow[U_۱=۰]{U_۲=۴K_۲\Rightarrow K_۲=\frac{۱}{۴}U_۲}U_۲+\frac{۱}{۴}U_۲=K_۱\Rightarrow U_۲=\frac{۴}{۵}K_۱$$

$$\xrightarrow[K_۱=\frac{۱}{۲}mv^۲\ ,\ v=۲۰\frac{m}{s}]{U_۲=mgh}m\times ۱۰\times h=\frac{۴}{۵}\times\frac{۱}{۲}\times m\times(۲۰)^۲\Rightarrow h=۱۶m$$

پایستگی انرژی مکانیکی

فرض کنید جسمی به جرم m را در شرایط خلأ از ارتفاع $h_۱$ رها کنیم و مانند شکل زیر، جسم با تندی $v_۲$ از ارتفاع $h_۲$ عبور کند، با توجه به پایستگی انرژی، بین این دو نقطه می‌توان نوشت:



$$E_۱=E_۲\Rightarrow K_۱+U_۱=K_۲+U_۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}mv_۱^۲+mgh_۱=\frac{۱}{۲}mv_۲^۲+mgh_۲$$

$$\xrightarrow[\text{حذف }m\text{ها}]{v_۱=۰}gh_۱=\frac{۱}{۲}v_۲^۲+gh_۲\Rightarrow v_۲^۲=۲g(h_۱-h_۲)\Rightarrow v_۲=\sqrt{۲g(h_۱-h_۲)}$$

در رابطهٔ بالا، $h_۱-h_۲$ فاصله از نقطهٔ رهاشدن (قلهٔ حرکت) است.

نکته

اگر جسمی به جرم m از ارتفاعی رها شود، تندی جسم در فاصلهٔ h از محل رهاشدن برابر است با:

$$v=\sqrt{۲gh}$$

یه نمونهٔ باحال

گلوله‌ای به جرم $۲kg$، از ارتفاعی رها می‌شود. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، تندی گلوله در فاصلهٔ ۴ متری از نقطهٔ رهاشدن چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ تشریحی:

کافی است در رابطهٔ بالا عددگذاری کنیم:

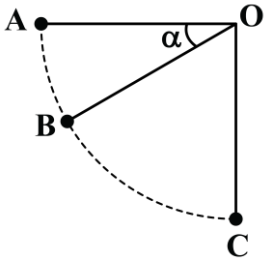
$$v=\sqrt{۲gh}=\sqrt{۲\times۱۰\times۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

تذکر!

همان‌طور که در اثبات رابطهٔ بالا دیدید، در حالتی که انرژی، پایسته است، جرم جسم در تندی جسمی که از ارتفاعی رها شده است، تأثیری ندارد.

۶۳- در شکل زیر، وزنه به نخی بسته شده است و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی نخ در حالت افقی قرار دارد، وزنه را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. اگر تغییر انرژی جنبشی وزنه در طی کمان AB، ۵۰ درصد بیش‌تر از تغییرات انرژی جنبشی وزنه در طی کمان BC باشد، α چند درجه است؟ ($\sin 37^\circ = 0/6$، $\sin 53^\circ = 0/8$ و مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)



۱) ۳۰

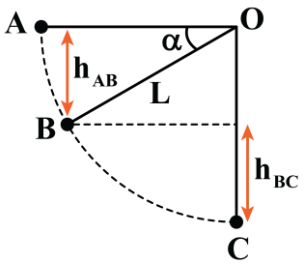
۲) ۳۷

۳) ۴۵

۴) ۵۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۰ ـ ۱۰۰۳)

طبق اصل پایستگی انرژی مکانیکی، اندازهٔ تغییرات انرژی جنبشی با اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل یکسان است؛ بنابراین:



$$\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_2} = \frac{mgh_{AB}}{mgh_{BC}} = \frac{h_{AB}}{h_{BC}} \xrightarrow{\Delta K_1 = \frac{150}{100}\Delta K_2} \frac{h_{AB}}{h_{BC}} = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$$

$$h_{AB} = L\sin\alpha$$

$$h_{BC} = L - h_{AB} = L - L\sin\alpha = L(1-\sin\alpha)$$

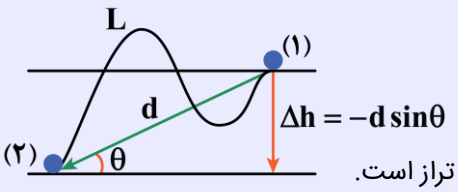
$$\Rightarrow \frac{L\sin\alpha}{L(1-\sin\alpha)} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sin\alpha = 3 - 3\sin\alpha$$

$$\Rightarrow 5\sin\alpha = 3 \Rightarrow \sin\alpha = 0/6 \Rightarrow \alpha = 37^\circ$$

راهنمای مسیرت

مشابه این سؤال توی کنکور ریاضی ۱۴۰۵ مطرح شد.

نحوهٔ محاسبهٔ جابه‌جایی، مسافت طی‌شده و تغییر ارتفاع



۱- جابه‌جایی (d): برداری است که ابتدای حرکت را به انتهای حرکت وصل می‌کند.

۲- مسافت طی‌شده (L): مجموع طول‌های پیموده‌شده حرکت را مسافت طی‌شده گویند.

۳- تغییر ارتفاع (Δh): برابر ارتفاع نهایی منهای ارتفاع اولیه است؛ اندازهٔ آن فاصلهٔ عمودی دو تراز است.

برای محاسبهٔ Δh، از نقطهٔ شروع و پایان دو خط موازی افقی رسم کنید. حال فاصله عمودی این دو خط را به‌دست آورید:

$$\Delta h = -d\sin\theta$$

تغییر ارتفاع می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

الف) اگر متحرک به سمت بالا حرکت کند: $h_2 > h_1 \Rightarrow \Delta h > 0$

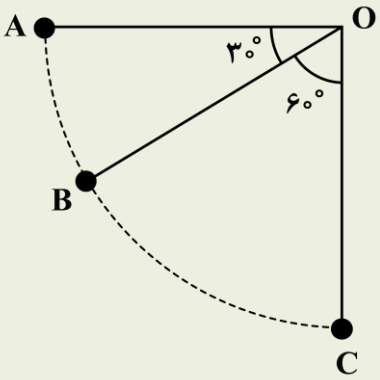
ب) اگر متحرک به سمت پایین حرکت کند: $h_2 < h_1 \Rightarrow \Delta h < 0$

پ) اگر متحرک ساکن باشد و یا این‌که افقی حرکت کند و یا این‌که دوباره به ارتفاع اولیهٔ خود بازگردد:

$$h_2 = h_1 \Rightarrow \Delta h = 0$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۵

۷۱- در شکل زیر، وزنه به نخی بسته شده است و در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. وقتی نخ در حالت افقی قرار دارد، وزنه را از نقطهٔ A رها می‌کنیم. اگر تغییر انرژی جنبشی وزنه در طی کمان ΔB برابر ΔK_1 و در طی کمان BC برابر ΔK_2 باشد، نسبت $\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2}$ چقدر است؟ (مقاومت هوا ناچیز فرض شود.)



۱) ۱

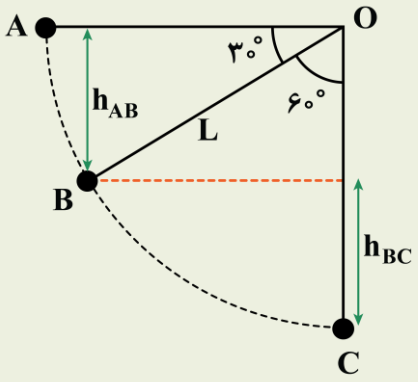
۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ تشریحی:

طبق اصل پایستگی انرژی، اندازهٔ تغییرات انرژی جنبشی با اندازهٔ تغییرات انرژی پتانسیل یکسان است؛ بنابراین:



$$\frac{\Delta K_1}{\Delta K_2}=\frac{\Delta U_1}{\Delta U_2}=\frac{mgh_{AB}}{mgh_{BC}}=\frac{h_{AB}}{h_{BC}}$$

$$h_{AB}=L\sin ۳۰^\circ=\frac{L}{۲}$$

$$h_{BC}=L-h_{AB}=L-\frac{L}{۲}=\frac{L}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2}=۱$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۶۴- مطابق شکل زیر، توپی به جرم ۵۰۰g با تندی $v_1=۱۰\frac{m}{s}$ از نقطهٔ A می‌گذرد. نیروی اصطکاک در سطح تماس توپ با زمین، ۱۹ درصد انرژی جنبشی اولیهٔ توپ را تا رسیدن به نقطهٔ B تلف می‌کند. سرعت متوسط توپ در جابه‌جایی بین دو نقطهٔ A و B چند متر بر ثانیه است؟ (از نیروی مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود و نیروی اصطکاک در تمام طول مسیر بین دو نقطهٔ A و B ثابت است.)



۱) ۹/۵

۲) ۱۰

۳) ۹

۴) ۱۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی / ترکیبی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۷۳ ـ ۱۰۰۳)

ابتدای انرژی جنبشی اولیهٔ توپ (K_1) را محاسبه می‌کنیم:

$$K_1=\frac{۱}{۲}m(v_1)^۲ \xrightarrow{m=۵۰۰g=\frac{۱}{۲}kg\ ,\ v_1=۱۰\frac{m}{s}} K_1=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times(۱۰)^۲=۲۵J$$

نیروی اصطکاک، ۱۹ درصدِ انرژی جنبشی اولیهٔ توپ (K_1) را تا رسیدن به نقطهٔ B تلف کرده است. دقت شود که جهت حرکت توپ برخلاف جهت نیروی اصطکاک وارد بر توپ است؛ پس کار نیروی اصطکاک منفی است و اندازهٔ آن برابر ۱۹ درصدِ انرژی جنبشی اولیهٔ توپ (K_1) است:

$$W_f=-\frac{۱۹}{۱۰۰}\times K_1 \xrightarrow{K_1=۲۵J} W_f=-\frac{۱۹}{۱۰۰}\times ۲۵=-\frac{۱۹}{۴}J$$

SanjeshCloud

حال با استفاده از رابطهٔ $W_f = E_۲ - E_۱$، انرژی جنبشی ثانویهٔ توپ $(K_۲)$ را محاسبه می‌کنیم. دقت کنید که انرژی مکانیکی اولیه $(E_۱)$ و ثانویهٔ $(E_۲)$ توپ، به‌ترتیب شامل انرژی جنبشی اولیه $(K_۱)$ و ثانویهٔ $(K_۲)$ توپ است و انرژی پتانسیل توپ در دو نقطهٔ A و B یکسان و صفر است (با توجه به این‌که مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی، سطح زمین درنظر گرفته شده است) زیرا ارتفاع توپ تغییر نکرده است:

$$W_f = E_۲ - E_۱ = K_۲ - K_۱$$

$$\xrightarrow{W_f = -\frac{۱۹}{۴}J \,,\, K_۱ = ۲۵J = \frac{۱۰۰}{۴}J} \frac{-۱۹}{۴} = K_۲ - \frac{۱۰۰}{۴} \Rightarrow K_۲ = \frac{۱۰۰}{۴} - \frac{۱۹}{۴} = \frac{۸۱}{۴}J$$

حال تندی توپ در نقطهٔ B $(v_۲)$ را با استفاده از انرژی جنبشی ثانویهٔ توپ $(K_۲)$ محاسبه می‌کنیم:

$$K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \xrightarrow{K_۲ = \frac{۸۱}{۴}J \,,\, m = \frac{۱}{۲}kg} \frac{۸۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}(v_۲)^۲$$

$$\Rightarrow (v_۲)^۲ = ۸۱ \Rightarrow v_۲ = ۹\frac{m}{s}$$

تنها نیرویی که به توپ وارد می‌شود، نیروی اصطکاک در سطح تماس توپ با زمین است و طبق صورت سؤال، نیروی اصطکاک در تمام طول مسیر بین دو نقطهٔ A و B ثابت است، پس حرکت توپ، یک حرکت با شتاب ثابت است و می‌توان سرعت متوسط توپ بین دو نقطهٔ A و B را با استفاده از یکی از روابط شتاب ثابت، محاسبه کرد:

$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \xrightarrow{v_۱ = ۱۰\frac{m}{s} \,,\, v_۲ = ۹\frac{m}{s}} v_{av} = \frac{۱۰ + ۹}{۲} = \frac{۱۹}{۲} = ۹/۵\frac{m}{s}$$

انرژی مکانیکی در حضور نیروهای اتلافی

همان‌طور که می‌دانیم، درصورتی‌که نیروهای غیرپایستار مانند نیروی مقاومت هوا و اصطکاک در مسئله وجود نداشتند، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند. در این درس‌نامه می‌خواهیم ببینیم در حضور این نیروها، انرژی مکانیکی چگونه تغییر خواهد کرد. به نکات زیر توجه کنید.

۱- کار نیروهای اصطکاک و مقاومت هوا، منفی است. این کار باعث کاهش‌یافتن انرژی مکانیکی جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$E_۲ - E_۱ = W_f$$

در رابطهٔ $W_f = E_۲ - E_۱$، همواره $E_۲ < E_۱$ است؛ بنابراین کار نیروهای اتلافی (مقاوم) همواره منفی است.

۲- انرژی مکانیکی که جسم از دست می‌دهد، صرف افزایش انرژی درونی محیط و جسم می‌شود؛ به عبارت دیگر تغییرات انرژی درونی محیط و جسم برابر $E_۱ - E_۲$ خواهد بود.

یه نمونهٔ باحال

جسمی به جرم $۲۰kg$ از ارتفاع ۱۲۰۰ متری از سطح زمین بدون سرعت اولیه رها می‌شود تا سقوط کند. اگر تا لحظهٔ رسیدن جسم به زمین، انرژی درونی محیط و جسم درمجموع $۲۳۶kJ$ افزایش یابد، تندی جسم هنگام برخورد به زمین چند کیلومتر بر ساعت است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

پاسخ تشریحی:

مطابق نکات فوق، اختلاف انرژی مکانیکی اولیه و نهایی جسم برابر افزایش انرژی درونی محیط و جسم است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{افزایش انرژی درونی} = |W_f| = E_۱ - E_۲ = U_۱ + K_۱ - (U_۲ + K_۲)$$

$$\xrightarrow[h_۲ = ۰]{v_۱ = ۰} ۲۳۶ \times ۱۰^۳ = mgh_۱ - \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲۳۶ \times ۱۰^۳ = (۲۰ \times ۱۰ \times ۱۲۰۰) - \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times v_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲۳۶ \times ۱۰^۳ = ۲۴۰ \times ۱۰^۳ - ۱۰v_۲^۲$$

$$\Rightarrow v_۲^۲ = ۴۰۰ \Rightarrow v_۲ = ۲۰\frac{m}{s} = ۷۲\frac{km}{h}$$

۶۵- یک سیستم تولید و توزیع برق شامل نیروگاه تولید و خطوط انتقال است. نیروگاه تولید برق، ۳۲ درصد انرژی شیمیایی ورودی را به انرژی الکتریکی تبدیل می‌کند. اگر بازدهٔ کل این سیستم ۲۰ درصد باشد، بازدهٔ خطوط انتقال چند درصد است؟

۱) ۶۲/۵ ۲) ۵۰ ۳) ۶/۴ ۴) ۶۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۷۶ ـ ۱۰۰۳)

نکته

برای محاسبهٔ بازدهٔ کل یک مجموعه شامل بخش‌های A، B و ... داریم:

$$Ra_t = Ra_A \times Ra_B \times \cdots$$

بازدهٔ یک سیستم شامل چند قسمت برابر با حاصل‌ضرب بازدهٔ قسمت‌های مختلف آن است.

$$Ra_{\text{کل}} = Ra_{\text{نیروگاه}} \times Ra_{\text{خطوط انتقال}} \Rightarrow \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۳۲}{۱۰۰} \times Ra_{\text{خطوط انتقال}}$$

$$\Rightarrow Ra_{\text{خطوط انتقال}} = \frac{۶۲/۵}{۱۰۰} = ۶۲/۵٪$$

راهنمای مسیرت

این سؤال مشابه تست کنکور تجربی ۱۴۰۵ است.

بازده (راندمان)

۱- نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی یک سیستم را بازده می‌گویند و آن را با Ra نشان می‌دهند. به عبارتی داریم:

$$(Ra)_{\text{بازده}} = \frac{\text{توان مفید } (P_{out})}{\text{توان ورودی } (P_{in})} \quad \text{یا} \quad (Ra)_{\text{بازده}} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}}$$

اگر بخواهیم بازده (Ra) را برحسب درصد بنویسیم، کافی است هر یک از نسبت‌های بالا را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

۲- بازده، یک کمیت بدون یکا است.

۳- مقدار بازده همیشه عددی بین صفر و یک است.

آزمون سراسری تجربی ۱۴۰۵

۶۹- بازدهٔ یک نیروگاه تولید برق ۲۵ درصد است و بازدهٔ خطوط انتقال برق تولیدشده ۶۰ درصد است. بازدهٔ کل این سیستم تولید و انتقال چند درصد است؟

۱) ۴۲/۵ ۲) ۳۵ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۱۵

پاسخ تشریحی:

$$Ra = \frac{E_۱}{E_t} \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{E_۱}{E_t} \Rightarrow E_۱ = \frac{۲۵}{۱۰۰} E_t$$

$$Ra' = \frac{E_۲}{E_۱} \Rightarrow \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{E_۲}{E_۱} \Rightarrow E_۲ = \frac{۶۰}{۱۰۰} E_۱ = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۱۵٪$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

بودجه‌بندی این آزمون	**شیمی دوازدهم:** مولکول‌ها در خدمت تندرستی: از ابتدای pH تا سر شوینده‌های خورنده	صفحه‌های ۲۴ تا ۳۰ **شیمی پایه:** ردپای گازها در زندگی (تا انتهای اثر گلخانه‌ای)	صفحه‌های ۴۷ تا ۶۹
سهم در کنکور	این آزمون در مجموع ۳ تست از ۳۰ تستِ کنکور را پوشش داده است.

سلام به مازی‌های عزیز

امروز، سومین مرحله از آزمون‌های ماز برگزار شد و امیدوارم که نتیجه دلخواهتون رو گرفته باشید. از آزمون بعدی، وارد فصل ۲ شیمی دوازدهم می‌شیم و علاوه بر اون، فصل دوم شیمی دهم رو هم به اتمام می‌رسونیم. در مقدمه این آزمون، می‌خوام به چند سؤال پرتکرار شما جواب بدم!

سؤال اول! فصل دوم شیمی دوازدهم، در رابطه با چیه؟

فصل دوم کتاب درسی شیمی دوازدهم، در رابطه با **علم الکتروشیمی** هست. به‌واسطه این علم، سعی می‌کنیم با استفاده از واکنش‌های شیمیایی، برق تولید کنیم. بچه‌ها دقت کنید که علم الکتروشیمی، به‌طور عمده از مطالب مفهومی تشکیل شده و حجم خیلی زیادی مسئله نداره. برای اینکه مطالب الکتروشیمی رو خیلی خوب یاد بگیرید، باید تعداد خیلی زیادی تست از اون حل کنید.

سؤال دوم! الکتروشیمی چه پیش‌نیازهایی داره؟

به‌طور کلی، فصل الکتروشیمی پیش‌نیاز خیلی خاصی نداره، به‌جز مطالب خیلی ابتدایی شیمی مثل رسم آرایش الکترونی عناصر، روند تولید انواع ترکیب‌های یونی و مولکولی، روش رسم **ساختار لوویس** و بررسی **ساختار انواع هیدروکربن‌ها**! اگر همین مطالب رو خیلی خوب بلد باشید، به‌راحتی از پس حل سؤالات الکتروشیمی برمیاید.

سؤال سوم! استوکیومتری، چند تا سؤال در کنکور داره؟

بچه‌ها، درسته که مطالب استوکیومتری در فصل ۲ شیمی دهم مطرح‌شده، اما این مبحث با هر قسمتی از سایر فصل‌ها **می‌تونه ترکیب بشه**. به همین خاطر هست که باید سعی کنید استوکیومتری رو خیلی خوب یاد بگیرید. به‌طور کلی، ردپای مطالب **استوکیومتری** در حداقل ۴ تا ۵ سؤال کنکور پیدا می‌شه و شما فقط در حالتی می‌تونید این سؤالات رو با سرعت خیلی بالا حل کنید که تعداد زیادی تست از اون‌ها حل کرده باشید.

به شما توصیه می‌کنم که در طول دو هفته آینده، اول از همه سعی کنید که مطالب فصل ۱ شیمی دوازدهم رو تکمیل کنید، چون این فصل با اختلاف از سایر فصل‌های شیمی دوازدهم مهم‌تره. بعد از اتمام مطالب فصل اول، شروع کنید به خوندن مطالب مقدماتی فصل الکتروشیمی! در کنار مطالعه مطالب این دو فصل، سعی کنید حتماً فصل ۲ شیمی دهم و به‌خصوص مطالب استوکیومتری رو به‌طور کامل مرور کنید.

موفق باشید.

دکتر فرشاد هادیان‌فرد ـ مسئول درس آزمون‌های تستی شیمی پایهٔ دوازدهم

۶۶- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ اغلب اسیدهایی که در زندگی روزمره با آن‌ها سروکار داریم، همانند اسید موجود در ریواس، اسید ضعیف هستند.

ب ـ تغییر دمای محلول، تنها روش ممکن برای ایجاد تغییر در درجه یونش باز ضعیف حل‌شده در محلول است.

ج ـ چون بلور جامد سدیم کلرید جریان برق را عبور نمی‌دهد، این ماده یک الکترولیت به شمار نمی‌رود.

د ـ رنگ کاغذ pH در محلول حاصل از انحلال کلسیم اکسید در آب، از زرد به آبی تغییر می‌کند.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف در زندگی روزانه با انواع اسیدها سروکار داریم که برخی **قوی** و اغلب آن‌ها **ضعیف** هستند. اسیدهای موجود در سیب، انگور، ریواس و مرکبات مانند پرتقال و لیمو و نیز انواع سرکه، از جمله اسیدهای خوراکی و ضعیف هستند. همه این اسیدها، در دسته **کربوکسیلیک اسیدها** قرار داشته و در ساختار آن‌ها، عامل **کربوکسیل** یافت می‌شود.

محلول سرکه

سرکه، محلولی از استیک اسید (اتانوئیک اسید) در آب است. به‌طور کلی، اسیدهای قوی را می‌توان محلولی شامل یون‌های آب پوشیده دانست، به‌طوری‌که در آن‌ها تقریباً مولکول‌های یونیده نشده یافت نمی‌شوند. در نقطه مقابل، در محلول اسیدهای ضعیف افزون بر اندک یون‌های آب پوشیده، مولکول‌های اسید یونیده نشده نیز یافت می‌شوند. برای نمونه، در محلول سرکه شمار ناچیزی از یون‌های آب‌پوشیده (یون‌های استات و هیدروژن)، هم‌زمان با شمار زیادی از مولکول‌های استیک اسید یونیده نشده حضور دارند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهند که در شرایط معین، غلظت همه گونه‌های موجود در محلول این اسید، همانند دیگر اسیدهای ضعیف ثابت است.

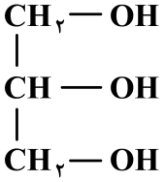
ب تغییر دمای محلول، یکی از روش‌های ممکن برای ایجاد تغییر در مقدار ثابت یونش و به دنبال آن، ایجاد تغییر در درجه یونش باز ضعیف حل‌شده در محلول است. علاوه بر تغییر دما، از تغییر غلظت محلول نیز می‌توان برای ایجاد تغییر در مقدار درجه یونش بازهای ضعیف استفاده کرد. در واقع، برای اسیدهای ضعیف با $\alpha<0/05$، مجذور درجه یونش (α^2)، با غلظت اسید، رابطه عکس دارد. در این رابطه، داریم:

$$K_a = M.\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 \propto \frac{1}{M}$$

ج به موادی که در حالت محلول در آب، جریان الکتریسیته را از خود عبور می‌دهند، الکترولیت گفته شده و به موادی که در حالت محلول در آب، جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهند، غیرالکترولیت گفته می‌شود. چون سدیم کلرید با انحلال در آب، به یون‌های سازنده خود تفکیک شده و یک محلول آبی **رسانا** را ایجاد می‌کند، در دسته **مواد الکترولیت** قرار می‌گیرد.

د کلسیم اکسید، نوعی اکسید فلزی با خاصیت بازی است. بر این اساس، محلول حاصل از **انحلال کلسیم اکسید** در آب، یک محلول بازی بوده و رنگ کاغذ pH را از **زرد** به **آبی** تغییر می‌دهد.

۶۷- ثابت یونش هگزانوئیک اسید در آب، برابر با $1/5\times10^{-7}\ mol.L^{-1}$ است. ۱/۵ لیتر محلول هگزانوئیک اسید با $pH=3/5$ با چند مول از الکل مقابل واکنش می‌دهد؟ ($H=1, C=12, O=16: g.mol^{-1}$)



۱) ۰/۴
۲) ۰/۲
۳) ۰/۶
۴) ۰/۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

هگزانوئیک اسید، کربوکسیلیک اسیدی با **۶ اتم کربن** بوده و یک ماده سیرشده است. فرمول شیمیایی این ماده به‌صورت $C_5H_{11}COOH$ بوده و فرایند یونش تعادلی آن به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$C_5H_{11}COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + C_5H_{11}COO^-(aq)\ ,\ K_a = ۱/۵\times۱۰^{-۷}\ mol.L^{-۱}$$

غلظت یون هیدرونیوم در محلولی با $pH = ۳/۵$ برابر است با:

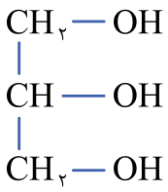
$$[H^+] = ۱۰^{-pH} \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۳/۵} = ۱۰^{۰/۵}\times۱۰^{-۴} = ۳\times۱۰^{-۴}\ mol.L^{-۱}$$

حال به کمک ثابت یونش و غلظت یون هیدرونیوم، غلظت اسید در این محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$K_a = \frac{[H^+]^۲}{M-[H^+]} \Rightarrow ۱/۵\times۱۰^{-۷} = \frac{(۳\times۱۰^{-۴})^۲}{M-۳\times۱۰^{-۴}} \xrightarrow{\text{غلظت یون هیدرونیوم در مقایسه با غلظت اولیه اسید خیلی ناچیز است}}$$

$$۱/۵\times۱۰^{-۷} \simeq \frac{(۳\times۱۰^{-۴})^۲}{M} \Rightarrow M = \frac{۹\times۱۰^{-۸}}{۱/۵\times۱۰^{-۷}} = ۰/۶ mol.L^{-۱}$$

برای محاسبه غلظت اولیه اسید در محلول مورد نظر، از رابطه $[H^+] = \sqrt{K_a \times M}$ نیز می‌توان استفاده کرد. ترکیب الکلی مطرح‌شده در صورت سؤال، نوعی الکل ۳ عاملی به نام **گلیسرول** با فرمول شیمیایی $C_۳H_۸O_۳$ است. ساختار این الکل به‌صورت زیر است:



هر مول از این الکل، دارای ۳ گروه هیدروکسیل بوده و با ۳ مول کربوکسیلیک اسید واکنش می‌دهد. بر این اساس، می‌توان گفت واکنش هگزانوئیک اسید و این الکل به‌صورت زیر است:

$$C_۳H_۸O_۳ + ۳C_5H_{11}COOH \rightarrow C_{۲۱}H_{۳۸}O_۶ + ۳H_۲O$$

بر این اساس مقدار مول الکل مصرف‌شده در واکنش بالا را محاسبه می‌کنیم:

$$?mol\ C_۳H_۸O_۳ = ۱/۵L_{\text{محلول}} \times \frac{۰/۶ mol\ C_5H_{11}COOH}{۱L_{\text{محلول}}} \times \frac{۱ mol\ C_۳H_۸O_۳}{۳ mol\ C_5H_{11}COOH} = ۰/۳ mol$$

بنابراین ۰/۳ مول الکل با ۱/۵ لیتر از این اسید واکنش می‌دهد.

۶۸- محلولی از هیدروکلریک اسید با حجم یک لیتر و $pH = ۰$ را با ۵ لیتر محلول دیگر از این اسید مخلوط می‌کنیم. اگر مقدار pH محلول نهایی حاصل از این فرایند برابر با ۰/۶ باشد، غلظت محلول ۵ لیتری مصرف شده برابر با چند مول بر لیتر بوده است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

در قدم اول، غلظت یون هیدروژن در محلول ۱ لیتری را محاسبه کرده و شمار مول‌های یون هیدروژن موجود در این محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{۰} = ۱ mol.L^{-۱}$$

$$?mol\ H^+ = ۱L_{\text{محلول}} \times \frac{۱ mol\ H^+}{۱L_{\text{محلول}}} = ۱ mol$$

در مرحله بعد، غلظت یون هیدروژن در محلول ۵ لیتری را معادل با x مول بر لیتر در نظر گرفته و بر این اساس، مقدار مول یون هیدروژن موجود در این محلول آبی را به‌دست می‌آوریم:

$$?mol\ H^+ = ۵L_{\text{محلول}} \times \frac{x\ mol\ H^+}{۱L_{\text{محلول}}} = ۵x\ mol$$

در قدم آخر، غلظت یون هیدروژن را در محلول نهایی محاسبه کرده و پس از آن، غلظت اسید در محلول ۵ لیتری را به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+]=10^{-pH}=10^{-0/6}=(10^{-0/3})^2=0/25 mol.L^{-1}$$

$$[H^+]=\frac{\text{مجموع شمار مول‌های } H^+}{\text{حجم محلول}} \Rightarrow 0/25=\frac{1+5x}{1+5} \Rightarrow x=0/1 mol.L^{-1}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت محلول ۵ لیتری، معادل با ۰/۱ مول بر لیتر بوده است.

۶۹- آنیون موجود در ساختار کلسیم استات، دارای چند جفت الکترون ناپیوندی بوده و نسبت شمار آنیون به کاتیون در این ماده، چند برابر مقدار این نسبت در ساختار باریم سولفید است؟

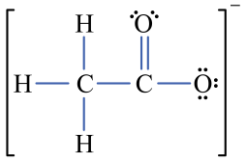
۱) ۵ ـ ۱ ۲) ۴ ـ ۱ ۳) ۵ ـ ۲ ۴) ۴ ـ ۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۸ ـ ۱۲۰۱)

کلسیم استات با فرمول شیمیایی $Ca(CH_3COO)_2$، نوعی ترکیب یونی است که از کنار هم قرار گرفتن **یون‌های کلسیم** (Ca^{2+}) و **استات** (CH_3COO^-) تشکیل شده است. نسبت شمار آنیون به کاتیون در ساختار کلسیم استات، برابر با ۲ است. یون استات، بر اثر یونش استیک اسید تولید می‌شود. فرایند **یونش استیک اسید** (اتانوئیک اسید) در محلول خود به‌صورت زیر است:

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons CH_3COO^-(aq)+H^+(aq)$$

ساختار یون استات به‌صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار یون استات، ۵ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. باریم سولفید نیز نوعی ترکیب یونی با فرمول شیمیایی BaS است که از کنار هم قرار گرفتن یون‌های **باریم** (Ba^{2+}) و **سولفید** (S^{2-}) تشکیل شده است. در ساختار این ماده نیز نسبت شمار آنیون به کاتیون برابر با یک است. با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

$$\frac{\text{نسبت شمار آنیون به کاتیون در } Ca(CH_3COO)_2}{\text{نسبت شمار آنیون به کاتیون در } BaS}=2$$

۷۰- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) محیط معده، خاصیت اسیدی داشته و اسید موجود در آن، موجب فعال کردن آنزیم‌های گوارشی می‌شود.
۲) با یونیده شدن همه اسیدهایی که طی واکنش تعادلی یونش می‌یابند، یک آنیون چنداتمی ایجاد می‌شود.
۳) غلظت یون هیدروکسید در شیر ترش‌شده، کمتر از غلظت این یون در محلول آبی آمونیاک است.
۴) pH خون موجود در رگ‌ها، برخلاف یک نمونه آب گازدار، بیشتر از pH آب خالص است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

۱. محیط معده خاصیت اسیدی دارد و این محیط مناسب فعال شدن آنزیم‌های گوارشی آن است.

۲. به‌طور مثال با یونش تعادل هیدروفلوئوریک اسید، آنیون چند اتمی ایجاد نمی‌شود.

۳. شیر ترش‌شده خاصیت اسیدی دارد و غلظت یون هیدروکسید آن کمتر از غلظت یون هیدروکسید در محلول بازی آمونیاک است.

۴. خون یک محلول با خاصیت بازی است و pH آن برخلاف آب گازدار از pH آب خالص بیشتر است.

با یونیده شدن برخی از اسیدهایی که طی واکنش تعادلی در محلول یونش می‌یابند، یک آنیون چنداتمی ایجاد می‌شود. برای مثال، فرایند یونش استیک اسید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$CH_3COOH(aq) \rightleftharpoons CH_3COO^-(aq) + H^+(aq)$$

طی این فرایند، یون هیدرونیوم به همراه آنیون چنداتمی استات تولید شده است. در نقطه مقابل، با یونیده شدن برخی از اسیدهایی که طی واکنش تعادلی در محلول یونش می‌یابند، یک آنیون تک‌اتمی در محلول ایجاد می‌شود.

برای مثال، فرایند یونش هیدروفلوئوریک اسید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$HF(aq) \rightleftharpoons F^-(aq) + H^+(aq)$$

همان‌طور که مشخص است، آنیون حاصل از یونش این ماده، یک آنیون تک‌اتمی به نام **یون فلوئورید** خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با ورود مواد غذایی به معده، یاخته‌های دیواره معده شروع به ترشح **هیدروکلریک اسید** می‌کنند. هدف این یاخته‌ها از ترشح اسید، کشتن جانداران ذره‌بینی و میکروب‌های موجود در غذا و فعال‌کردن آنزیم‌های گوارشی برای **تجزیه** مولکول‌های موجود در مواد غذایی است.

اسید معده

با ورود غذا به معده انسان، غدد موجود در دیوارهٔ معده، به دو منظور شروع به ترشح هیدروکلریک اسید می‌کنند:

۱) از بین بردن میکروب‌های موجود در غذاها

۲) فعال کردن آنزیم‌های گوارشی

در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیرهٔ معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدوداً برابر ۰/۰۳ مول بر لیتر و مقدار pH آن برابر با ۱/۵ است. به همین خاطر، فضای درون معده را می‌توان یک محیط اسیدی به حساب آورد؛ به‌طوری‌که این اسید حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند. دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازندهٔ دیوارهٔ معده می‌شود. آسیب به سلول‌های دیوارهٔ معده، سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود. برای مقابله با خاصیت اسیدی محتویات معده، می‌توان از داروهایی به نام ضد اسیدهای معده‌ای استفاده کرد. این داروها شامل یک یا چند ماده مؤثر هستند که عبارت‌اند از منیزیم هیدروکسید ($Mg(OH)_2$)، آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین یا $NaHCO_3$) می‌شوند.

۳) مقدار pH شیر ترش‌شده برابر ۲/۷ است، درحالی‌که محلول آبی آمونیاک خاصیت بازی داشته و pH آن از ۷ بیشتر است. توجه داریم که مقدار pH هر محلول، با غلظت یون هیدرونیوم در آن محلول رابطه معکوس دارد، پس می‌توان گفت غلظت یون هیدرونیوم در شیر ترش‌شده بیشتر از محلول آمونیاک می‌باشد. چون حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در دمای مشخص مقداری ثابت است، پس غلظت این دو یون با یکدیگر ارتباط عکس دارند. بنابراین غلظت یون هیدروکسید در شیر ترش‌شده کمتر از محلول آمونیاک است. توجه داریم که اسید موجود در شیر ترش‌شده، معادل با **لاکتیک اسید** است.

۴) آب گازدار، یک محلول اسیدی و خون موجود در رگ‌های بدن یک محلول بازی است. محلول‌های اسیدی دارای pH کوچک‌تر از ۷ بوده و محلول‌های بازی نیز دارای pH بزرگ‌تر از ۷ هستند.

خواص اسیدی و بازی در بدن انسان

محتویات موجود در هر عضو از بدن انسان، براساس وظیفه و کارکرد آن عضو، مقدار pH خاصی دارند. به‌عنوان مثال، pH بزاق تقریباً برابر ۶ و pH شیره معده کمی کمتر از ۲ بوده و این محلول‌ها خاصیت اسیدی دارند. در طرف مقابل، pH خون و محتویات روده به‌ترتیب برابر ۷/۴ و ۸/۵ است؛ پس این محیط‌ها خاصیت بازی دارند.

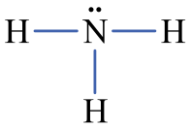
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۱- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) دی‌نیتروژن پنتاکسید، در دمای اتاق حالت جامد داشته و با انحلال نیم مول از آن در آب، دو مول یون تولید می‌شود.
۲) اسید موجود در باران‌های معمولی، برخلاف ترکیب‌های اسیدی موجود در باران‌های اسیدی، ثابت یونش کوچکی دارد.
۳) آنیون حاصل از هالوژنی که در ترکیب با هیدروژن، یک اسید ضعیف را ایجاد می‌کند، آرایش الکترونی مشابه نئون دارد.
۴) آمونیاک، از مولکول‌هایی با ساختار مسطح تشکیل شده و نسبت به پتاسیم هیدروکسید، خاصیت بازی ضعیف‌تری دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

ساختار مولکول آمونیاک به‌صورت زیر است:



در مولکول آمونیاک، یک جفت الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی قرار گرفته است، پس این ماده ساختار برآمده دارد. تصویر زیر، ساختار مولکول آمونیاک را به‌صورت دقیق نشان می‌دهد:



آمونیاک یک باز ضعیف بوده و نسبت به پتاسیم هیدروکسید، خاصیت بازی ضعیف‌تری دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هرچند که اغلب اکسیدهای نافلزی در دمای اتاق حالت گاز دارند، اما حالت فیزیکی دی‌نیتروژن پنتاکسید با فرمول شیمیایی N_2O_5 در دمای اتاق، جامد است. از حل شدن یک مول از این اکسید نافلزی در آب، ۴ مول یون تولید می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، این ماده یک اکسید اسیدی است. معادله واکنش این ماده با آب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

با توجه به معادله بالا، پس از حل شدن نیم مول از این ترکیب در آب، **دو مول یون** (یک مول یون نیترات و یک مول یون هیدروژن) تولید خواهد شد.

اکسیدهای فلزی و نافلزی

اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با آب واکنش داده و با تولید یون‌های هیدروژن و هیدروکسید در محلول، pH را تغییر می‌دهند. نمودار زیر، تقسیم‌بندی کلی این مواد را نشان می‌دهد:



- اکسید عناصر
  - اکسید فلزی
    - دارای خاصیت بازی
      - کلسیم اکسید - سدیم اکسید
    - خنثی
      - آلومینیم اکسید
  - اکسید نافلزی
    - دارای خاصیت اسیدی
      - کربن دی‌اکسید - گوگرد تری‌اکسید
    - خنثی
      - نیتروژن مونوکسید - کربن مونوکسید

به‌عنوان مثال، کشاورزان کلسیم اکسید (CaO یا آهک) را به‌عنوان یک اکسید بازی، برای افزایش بهره‌وری به خاک می‌افزایند. افزودن این ماده به خاک، با تغییر pH، سبب می‌شود تا مقدار و نوع مواد معدنی در دسترس گیاه تغییر کند. از کلسیم اکسید به‌عنوان یک ماده بازی، برای کنترل میزان اسیدی بودن آب دریاچه‌ها استفاده می‌شود. برای مثال، معادله واکنش کلسیم اکسید با هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر است:

$$CaO(s) + 2HCl(aq) \rightarrow CaCl_2(aq) + H_2O(l)$$

۲) نمودار زیر، اسیدهای موجود در هر نمونه از باران‌های مختلف را نشان می‌دهد:



اسید موجود در باران‌های مختلف		
باران‌های اسیدی		باران‌های معمولی
سولفوریک اسید	نیتریک اسید	کربنیک اسید

کربنیک اسید، بر اثر واکنش میان آب و گاز کربن‌دی‌اکسید تولید شده و فرمول شیمیایی آن به‌صورت H_2CO_3 است. این اسید، از جمله اسیدهای ضعیف دو پروتون‌دار به‌شمار می‌رود. توجه داریم که نیتریک اسید و سولفوریک اسید، از جمله اسیدهای قوی هستند.

آثار تغییر pH آب روی طبیعت

مرجان‌ها، گروهی از کیسه‌تنان با اسکلت آهکی هستند و همان‌طور که می‌دانیم، آهک همان کلسیم اکسید با فرمول شیمیایی CaO است. کلسیم اکسید فقط از دو عنصر مختلف ساخته‌شده و یک ترکیب یونی دوتایی به‌شمار می‌رود. پژوهش‌ها نشان می‌دهند که این جانداران با افزایش مقدار کربن‌دی‌اکسید موجود در آب و کاهش pH آب (اسیدی شدن آب)، از بین می‌روند. در واقع اسید موجود در آب با اسکلت آهکی این جانداران واکنش داده و با از بین بردن آن، موجب مرگ این جانداران می‌شود.

۳) هالوژنی که در ترکیب با هیدروژن یک اسید ضعیف را ایجاد می‌کند، معادل با فلوئور است. آنیون حاصل از فلوئور (یون فلوئورید)، دارای ۱۰ الکترون بوده و آرایش الکترونی آن مشابه آرایش الکترونی نئون است. نمودار زیر، برخی از ویژگی‌های عنصر فلوئور را نشان می‌دهد:



فلوئور				
عنصری از جدول دوره‌ای است که بیشترین خاصیت نافلزی را دارد.	آنیون حاصل از آن سبب حفظ سلامت دندان‌ها می‌شود.	نسبت به سایر هالوژن‌ها واکنش‌پذیری بیشتری دارد.	نسبت به سایر هالوژن‌ها کوچک‌ترین شعاع اتمی را دارد.	حتی در دماهای پایین هم با گاز هیدروژن وارد واکنش می‌شود.

ماز

۷۲- در دمای معین، ثابت یونش نیترو اسید، ۴ برابر ثابت یونش فورمیک اسید است. کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ نیم لیتر محلول ۰/۲ مولار از این دو اسید درست هستند؟

الف ـ اختلاف مقدار pH این دو محلول آبی در شرایط داده شده، تقریباً برابر با ۰/۳ واحد خواهد بود.

ب ـ غلظت یون $HCOO^-$ در محلول فورمیک اسید، کمتر از غلظت NO_2^- در محلول نیترو اسید است.

ج ـ در شرایط یکسان، حجم گاز تولید شده از واکنش کامل محلول نیترواسید با نوار منیزیم بیشتر است.

د ـ در صورت افزودن دو محلول به یکدیگر، مقدار ثابت یونش اسیدهای حل‌شده در این دو محلول دچار تغییر می‌شود.

۱) «الف» و «ب»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ج» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱　　**(سخت ـ محاسباتی و مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) رابطهٔ تقریبی مربوط به محاسبه مقدار ثابت یونش اسیدهای ضعیف به‌صورت مقابل است: $K_a \simeq \frac{[H^+]^2}{M}$

از آنجا که غلظت مولی محلول این دو اسید یکسان است، اگر ثابت یونش نیترو اسید را با K_{a_1} و ثابت یونش فورمیک اسید را با K_{a_2} نشان دهیم داریم:

$$\frac{K_{a_1}}{K_{a_2}} \simeq \frac{\frac{[H^+]_1^2}{M_1}}{\frac{[H^+]_2^2}{M_2}} = \frac{[H^+]_1^2}{[H^+]_2^2} = 4$$

در ادامه، از طرفین رابطه بالا منفی لگاریتم می‌گیریم و حاصل آن را ساده می‌کنیم:

$$-\log\left(\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2}\right)^2 = -\log 4 \Rightarrow -\log\left(\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2}\right)^2 = -\log(2)^2 \Rightarrow -2\log\frac{[H^+]_1}{[H^+]_2} = -2(\log 2)$$

$$-(\log[H^+]_1 - \log[H^+]_2) = -\log 2 \Rightarrow pH_1 - pH_2 = -0/3 \Rightarrow pH_2 - pH_1 = 0/3$$

پ) با توجه به داده‌های سؤال، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{K_{a_1}}{K_{a_2}} \simeq \frac{[H^+]_1^2}{[H^+]_2^2} = 4 \Rightarrow \frac{[H^+]_1}{[H^+]_2} = \sqrt{4} = 2$$

توجه داریم که در محلول‌های فورمیک اسید و نیترو اسید، غلظت یون‌های فورمات و NO_2^- با غلظت یون هیدرونیوم برابر است، پس غلظت یون فورمات نصف غلظت یون NO_2^- می‌شود.

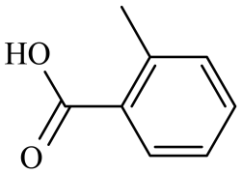
ج) از آنجا که حجم و غلظت مولی این دو اسید یکسان است و هر دو اسید تک ظرفیتی هستند، در شرایط یکسان بر اثر واکنش کامل با نوار منیزیم حجم گاز تولید شده از آن‌ها، با هم برابر خواهد بود. معادله واکنش‌های انجام شده به‌صورت زیر است:

$$2HCOOH(aq) + Mg(s) \rightarrow H_2(g) + Mg(HCOO)_2(aq)$$
$$2HNO_2(aq) + Mg(s) \rightarrow H_2(g) + Mg(NO_2)_2(aq)$$

توجه داریم که در شرایط یکسان، هر چه غلظت یون هیدرونیوم در محلول آبی اسید بیشتر باشد، سرعت واکنش آن محلول با فلز منیزیم بیشتر خواهد بود و واکنش مورد نظر زودتر به پایان می‌رسد.

د) ثابت یونش اسیدی یک ماده، فقط به دمای محیط بستگی داشته و هیچ عامل دیگری روی مقدار ثابت یونش مؤثر نیست. بر این اساس، می‌توان گفت در صورت افزودن دو محلول به یکدیگر، مقدار ثابت یونش اسیدهای حل‌شده در این دو محلول دچار تغییر نمی‌شود.

۷۳- یک نمونه ۱۳/۶ گرمی از اسید مقابل را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۱۰ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول تولید شده طی این فرایند برابر با ۳/۷ باشد، درجه یونش این اسید در محلول مورد نظر کدام است؟ ($O=16, C=12, H=1: g.mol^{-1}$)



۱) ۰/۰۲
۲) ۰/۰۵
۳) ۰/۲
۴) ۰/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۴۰۱)

برای حل این سؤال، طبق مراحل زیر پیش می‌رویم:

۱) فرمول شیمیایی اسید مورد نظر را پیدا کرده و غلظت مولی اسید را در محلول محاسبه می‌کنیم.

۲) غلظت یون هیدروژن را در محلول محاسبه می‌کنیم.

۳) درجه یونش اسید را محاسبه می‌کنیم.

ترکیب مورد نظر، نوعی **کربوکسیلیک اسید آروماتیک** با فرمول شیمیایی $C_8H_8O_2$ به شمار می‌رود. در قدم اول، مقدار مول این ماده را محاسبه کرده و بر این اساس، غلظت مولی ترکیب حل‌شده در محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$?\,mol\,C_8H_8O_2 = ۱۳/۶\,g\,C_8H_8O_2 \times \frac{۱\,mol\,C_8H_8O_2}{۱۳۶\,g\,C_8H_8O_2} = ۰/۱\,mol$$

$$[C_8H_8O_2] = \frac{\text{مول } C_8H_8O_2}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۱\,mol\,C_8H_8O_2}{۱۰\,L\,\text{محلول}} = ۰/۰۱\,mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، غلظت یون هیدروژن را در محلول مورد نظر محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳/۷} = ۰/۰۰۰۲\,mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، درجه یونش اسید مورد نظر را در محلول داده‌شده محاسبه می‌کنیم:

$$\left[H^+\right] = \alpha M \Rightarrow ۰/۰۰۰۲\ mol.L^{-۱} = ۰/۰۱ \times \alpha \Rightarrow \alpha = ۰/۰۲$$

۷۴- در رابطه با محلولی از هیدروکلریک اسید که غلظت یون کلرید در آن برابر با ۰/۲ مول بر لیتر است، کدام مطلب درست است؟

۱) با افزودن مقداری آب خالص به این محلول، مقدار pH محلول مورد نظر کاهش پیدا می‌کند.

۲) رسانایی الکتریکی این محلول، با رسانایی الکتریکی محلول ۰/۲ مولار سولفوریک اسید برابر است.

۳) با انحلال مقداری گاز HF در یک لیتر از این محلول، مقدار pH محلول مورد نظر کاهش پیدا می‌کند.

۴) با قرار گرفتن این محلول در مسیر یک مدار الکتریکی، یون‌های کلرید به سمت تیغه منفی حرکت می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

هیدروکلریک اسید بر اساس معادله زیر در محلول خود یونش پیدا می‌کند:

$$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

در محلول **هیدروکلریک اسید**، غلظت یون **هیدروژن** و غلظت یون **کلرید** با هم **برابر** است. بر این اساس، می‌توان گفت غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر برابر با ۰/۲ مول بر لیتر است. با انحلال گاز هیدروژن فلوئورید در محلول مورد نظر، این ماده به مقدار اندکی در محلول یونش پیدا کرده و بر این اساس، غلظت یون هیدروژن در محلول **افزایش** پیدا می‌کند. با افزایش غلظت یون هیدروژن در محلول مورد نظر، مقدار pH محلول **کاهش** پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با افزودن مقداری آب خالص به این محلول، غلظت اسید در محلول کاهش یافته و بر این اساس، غلظت یون هیدروژن نیز در این محلول کاهش پیدا می‌کند. با **کاهش** غلظت یون **هیدروژن** در محلول، مقدار pH محلول مورد نظر **افزایش** پیدا می‌کند.

تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی

با افزودن آب و یا تبخیر آب از محلول‌های اسیدی، غلظت اسید در محلول مورد نظر تغییر می‌کند. در رابطه با تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، به نکات زیر توجه کنید:

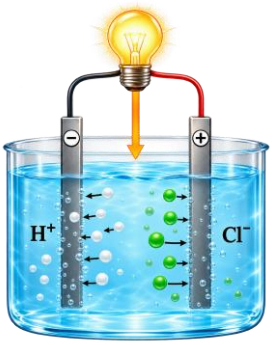
- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم (حجم محلول را با اضافه‌کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی $(pH=۷)$ نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم (با افزایش مقدار اسید یا باز و یا کاهش مقدار آب موجود در محلول)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد از pH ناحیه خنثی $(pH=۷)$ دورتر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف (مثل هیدروفلوئوریک اسید و یا هیدروسیانیک اسید) و یا یک باز ضعیف (مثل آمونیاک) را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی $(pH=۷)$ نزدیک‌تر می‌شود.
- اگر محلول یک اسید ضعیف و یا یک باز ضعیف را به اندازه n مرتبه غلیظ کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $\log n$ واحد از مقدار pH ناحیه خنثی $(pH=۷)$ دورتر می‌شود.

۲) در هر لیتر از محلول مورد نظر، ۰/۲ مول یون هیدروژن و ۰/۲ مول یون کلرید وجود دارد. سولفوریک اسید نیز نوعی اسید دو پروتون‌دار بوده و بر اساس معادله زیر در محلول خود یونش پیدا می‌کند:

$$H_2SO_4(aq) \rightarrow 2H^+(aq) + SO_4^{2-}(aq)$$

از یونش سولفوریک اسید، ۲ یون هیدروژن و یک یون سولفات تولید می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت در هر لیتر از محلول ۰/۲ مولار سولفوریک اسید، ۰/۴ مول یون هیدروژن و ۰/۲ مول یون سولفات وجود دارد. چون غلظت یون‌ها در این دو محلول متفاوت از هم است، پس رسانایی الکتریکی این دو محلول نیز متفاوت از یکدیگر خواهد بود.

۴) با قرار گرفتن این محلول اسیدی در مسیر یک مدار الکتریکی، یون‌های کلرید با بار الکتریکی **منفی** به سمت تیغه با بار الکتریکی متفاوت، یعنی تیغه **مثبت** حرکت می‌کنند. تصویر زیر، نمایی از این محلول را در مسیر یک مدار الکتریکی نشان می‌دهد:



۷۵- در رابطه با یک نمونه از آب خالص در شرایط استاندارد، کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) مایع مورد نظر، به خاطر وجود یون‌های هیدروکسید و هیدرونیوم، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد.

۲) حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در این محلول، برابر $10^{-14}\,mol^2.L^{-2}$ است.

۳) با انحلال مقداری سدیم اکسید در این محلول، غلظت یون هیدرونیوم موجود در آن کاهش پیدا می‌کند.

۴) از این ماده، می‌توان به‌عنوان پاک‌کننده مناسب برای پاک کردن مقداری استیک اسید در محیط استفاده کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

بررسی سریع:

۱. آب خالص به خاطر مقادیر کمی از یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد.

۲. حاصل‌ضرب یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در دمای اتاق برابر این مقدار است نه در شرایط STP.

۳. سدیم اکسید باز آرنیوس است و با حل شدن در آب غلظت یون هیدرونیوم را کاهش می‌دهد.

۴. استیک اسید قطبی بوده و آب به‌عنوان یک مایع قطبی می‌تواند آن را در خود حل کند و از محیط پاک کند.

بر اساس مشاهدات تجربی، نمونه‌ای از آب خالص، رسانایی الکتریکی بسیار ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن (یا همان هیدرونیوم) در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، براساس واکنش $H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$ در آب تولید می‌شوند. ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H_2O(l) \rightleftharpoons OH^-(aq) + H^+(aq) \qquad K = K_W = [OH^-][H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهند که مقدار K_W در دمای اتاق (دمای ۲۵ درجه سانتی‌گراد)، برابر با $10^{-14}\,mol^2.L^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است. از آن‌جا که در آب خالص، همواره غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید با هم برابر هستند، خواهیم داشت:

$$K_W = [H^+][OH^-] = 10^{-14} \xrightarrow{[H^+]=[OH^-]} 10^{-14} = [H^+]^2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-7}\,mol.L^{-1}$$

SanjeshCloud

توجه داریم که حاصل‌ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در محلول مورد نظر، به خاطر اینکه دمای محلول معادل با صفر درجه سلسیوس بوده و معادل با دمای اتاق نیست، برابر با $۱۰^{-۱۴}\,mol^{۲}.L^{-۲}$ نخواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) نمونه مورد نظر، به خاطر وجود یون‌های **هیدروکسید** و **هیدرونیوم**، رسانایی الکتریکی دارد اما رسانایی الکتریکی آن بسیار ناچیز است.

۲) سدیم اکسید، نوعی اکسید بازی بوده و سدیم هیدروکسید را در محلول تولید می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت با انحلال مقداری سدیم اکسید در یک نمونه از آب خالص، مقداری یون هیدروکسید در محلول تولید می‌شود. با **افزایش** غلظت یون هیدروکسید در محلول مورد نظر، غلظت یون **هیدرونیوم** موجود در آن **کاهش** پیدا می‌کند.

۴) چون استیک اسید از ذرات قطبی ساخته شده است، پس یک نمونه از آن محلول در آب خواهد بود. بر این اساس، می‌توان گفت از آب خالص، می‌توان به‌عنوان شوینده مناسب برای پاک کردن مقداری استیک اسید در محیط استفاده کرد.

ماز

۷۶- در دمای اتاق، محلول ۰/۲ مولار اسید HA با ثابت یونش ۲×۱۰^{-۵} مول بر لیتر، در اختیار داریم. غلظت مولی یون هیدروکسید در این محلول، چند برابر غلظت مولی یون هیدرونیوم است؟

۱) ۴×۱۰^{-۶} ۲) ۴×۱۰^{-۸} ۳) $۰/۲۵\times۱۰^{-۶}$ ۴) $۰/۲۵\times۱۰^{-۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به ثابت یونش اسید مورد نظر، غلظت یون هیدروژن را در این محلول محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+]=\sqrt{K_a\times M}\Rightarrow[H^+]=\sqrt{(۲\times۱۰^{-۵})\times۰/۲}=۲\times۱۰^{-۳}\,mol.L^{-۱}$$

در رابطه با این محلول اسیدی، داریم:

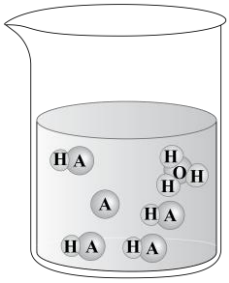
$$[H^+][OH^-]=۱۰^{-۱۴}\Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳}\times[OH^-]=۱۰^{-۱۴}\Rightarrow[OH^-]=\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۱۱}\,mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به غلظت مولی یون هیدرونیوم را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{[OH^-]}{[H^+]}=\frac{\frac{۱}{۲}\times۱۰^{-۱۱}}{۲\times۱۰^{-۳}}=\frac{۱}{۴}\times۱۰^{-۸}=۰/۲۵\times۱۰^{-۸}$$

ماز

۷۷- تصویر مقابل، ۲۰۰mL محلول اسید HA با غلظت ۰/۰۵ مولار را نشان می‌دهد. درصد یونش ذرات اسید در این محلول چقدر بوده و pH این محلول آبی کدام است؟



۱) ۲۵ ـ ۲
۲) ۲۰ ـ ۲
۳) ۲۵ ـ ۲/۳
۴) ۲۰ ـ ۲/۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

در محلول مورد نظر، ۵ اتم A وجود دارد که ۴ مورد از آن‌ها در قالب مولکول‌های HA بوده و یکی از آن‌ها نیز در قالب یون A^- است. بر این اساس، می‌توان گفت از هر ۵ مولکول اسید حل‌شده در محلول مورد نظر، یک مولکول یونش یافته و به یون‌های A^- و H^+ تبدیل شده است. چهار مولکول دیگر، به‌صورت یونیده نشده در محلول باقی‌مانده‌اند. با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

$$\text{درصد یونش}=\frac{\text{تعداد مولکول یونیده‌شده}}{\text{تعداد کل مولکول‌های حل‌شده در محلول}}\times۱۰۰=\frac{۱}{۵}\times۱۰۰=\text{درصد}۲۰$$

درصد یونش اسید، برابر با ۲۰٪ است، پس درجه یونش این ماده برابر با ۰/۲ خواهد بود. با توجه به غلظت محلول مورد نظر و درجه یونش اسید حل‌شده در محلول، داریم:

$$[H^+]=\alpha M=۰/۲\times ۰/۰۵=۰/۰۱ mol.L^{-۱}$$

$$pH=-\log[H^+]=-\log(۰/۰۱)=۲$$

با توجه به محاسبات انجام شده، مقدار pH محلول مورد نظر برابر با ۲ است.

۷۸- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) بازها کاربردهای زیادی در زندگی روزانه دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به شیشه پاک‌کن و لوله بازکن اشاره کرد.

۲) اگر غلظت یون هیدروکسید در یک محلول اسیدی قوی ۲ برابر شود، pH این محلول ۱ واحد افزایش پیدا می‌کند.

۳) در محلول هیدروسیانیک اسید، یون‌های $H_۳O^+$ و $CN^{۲-}$، به‌صورت آزادانه و نامنظم در حال جنبش هستند.

۴) یک نمونه از محلول اتانول در آب، نوعی محلول غیرالکترولیت بوده و مسیر حرکت نور در آن مشخص است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

بازها کاربردهای گسترده‌ای در زندگی روزانه دارند که از جمله آن‌ها می‌توان به تهیه محلول شیشه پاک‌کن (محلول آبی آمونیاک در آب) و تهیه محلول لوله بازکن (محلول آبی سدیم هیدروکسید در آب که نوعی پاک‌کننده خورنده قوی به‌شمار می‌رود) اشاره کرد. توجه داریم که در محلول‌های بازی، غلظت یون هیدروکسید بیشتر از یون هیدرونیوم است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) غلظت یون هیدروکسید در محلول اسیدی ۲ برابر شده است. با توجه به ثابت بودن حاصل‌ضرب غلظت یون‌های **هیدروژن** و **هیدروکسید** ($[H^+][OH^-]$) در یک محلول، می‌توان گفت غلظت یون هیدروژن ($[H^+]$) در این محلول ۰/۵ برابر شده است. اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را افزایش دهیم، pH محلول موردنظر از عدد ۷ **دورتر** می‌شود و اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را **کاهش** دهیم، pH محلول موردنظر به عدد ۷ **نزدیک‌تر** می‌شود. چون غلظت یون هیدروژن در این محلول اسیدی **کاهش** یافته است، پس می‌توان گفت طی این فرایند pH محلول مورد نظر به ۷ نزدیک‌تر شده و افزایش یافته است. به‌طورکلی اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه $|\log(n)|$ واحد به pH ناحیهٔ **خنثی** ($pH=۷$) نزدیک‌تر می‌شود. غلظت اسید مورد نظر ۰/۵ برابر شده پس pH این اسید به اندازه $|\log(۰/۵)|=۰/۳$ واحد **افزایش** یافته است.

۳) هیدروسیانیک اسید، بر اساس معادله زیر در محلول خود یونش پیدا می‌کند:

$$HCN(aq)\rightleftharpoons H^+(aq)+CN^-(aq)$$

در این محلول، یون‌های سیانید و هیدروژن در کنار هم و در تعادل با ذرات اسید یونیده نشده قرار گرفته‌اند.

۴) اتانول یک ماده غیرالکترولیت بوده و به‌صورت مولکولی در آب حل می‌شود؛ پس یک نمونه از محلول این ماده در آب، **نارسانا** و **غیرالکترولیت** است. چون محلول اتانول در آب همگن است، مسیر حرکت نور در آن مشخص نخواهد بود.

مواد الکترولیت و غیرالکترولیت

به موادی مانند اتانول، استون و شکر که انحلال آن‌ها در آب به شکل مولکولی بوده و هیچ یونی را تولید نمی‌کنند، غیرالکترولیت و به محلول حاصل از آن‌ها نیز، محلول غیرالکترولیت می‌گویند. در نقطه مقابل، به گروهی از مواد مثل استیک اسید، سدیم اکسید، سدیم کلرید و یا منیزیم نیترید که به‌صورت یونی در محلول حل شده و سبب ایجاد یون‌هایی با بار مثبت و منفی در محلول می‌شوند، الکترولیت گفته می‌شود.

۷۹- در محلولی از باریم هیدروکسید با چگالی $1g.mL^{-1}$، غلظت یون باریم برابر با ۲۷۴۰ppm است. مقدار pH این محلول آبی به اندازه چند واحد با pH محلول ۰/۰۱ مولار نیتریک اسید تفاوت دارد؟ ($Ba=137g.mol^{-1}$)

۱) ۹/۳ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۰/۳ ۴) ۱۰/۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۰ ـ ۱۲۰۱)

باریم هیدروکسید، یک باز دو ظرفیتی بوده و بر اساس معادله زیر در محلول خود تفکیک می‌شود:

$$Ba(OH)_2(s) \rightarrow Ba^{2+}(aq) + 2OH^-(aq)$$

غلظت ppm یون باریم، به ما نشان می‌دهد که در هر 10^6 گرم از محلول، چند گرم یون باریم وجود دارد. بر این اساس، مقدار یون باریم موجود در هر لیتر از محلول داده شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?mol\,Ba^{2+} = 1L\,\text{محلول} \times \frac{1000mL\,\text{محلول}}{1L\,\text{محلول}} \times \frac{1g\,\text{محلول}}{1mL\,\text{محلول}} \times \frac{2740g\,Ba^{2+}}{10^6g\,\text{محلول}} \times \frac{1mol\,Ba^{2+}}{137g\,Ba^{2+}} = 0/02mol$$

در هر لیتر از محلول مورد نظر، ۰/۰۲ مول یون باریم وجود دارد، پس غلظت مولی یون باریم در این محلول آبی برابر با ۰/۰۲ مول بر لیتر است. هر مول باریم هیدروکسید، یک مول Ba^{2+} و ۲ مول یون هیدروکسید در محلول آزاد می‌کند، پس غلظت مولی یون هیدروکسید در محلول مورد نظر ۲ برابر غلظت مولی یون باریم است. بر این اساس، محلولی از باریم هیدروکسید در اختیار داریم که غلظت مولی یون هیدروکسید در آن برابر با ۰/۰۴ مول بر لیتر است. با توجه به توضیحات داده شده، داریم:

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{[OH^-]} = \frac{10^{-14}}{0/04} = 0/25 \times 10^{-12} mol.L^{-1}$$

در نهایت، pH محلول را حساب می‌کنیم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(0/25 \times 10^{-12}) = 12/6$$

با توجه به محاسبات بالا، مقدار pH محلول نهایی برابر با ۱۲/۶ است. نیتریک اسید نیز نوعی اسید قوی بوده و غلظت یون هیدروژن در محلول ۰/۰۱ مولار آن برابر با ۰/۰۱ مول بر لیتر می‌شود. در رابطه با این محلول نیز داریم:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(10^{-2}) = 2$$

بر این اساس، تفاوت مقدار pH دو محلول برابر با ۱۰/۶ واحد می‌شود.

ماز

۸۰- واکنش موازنه‌نشدهٔ $KBr(aq) + NO(g) + H_2O(l) + I_2(s) \rightarrow KNO_2(aq) + KI(aq) + HBr(aq)$، در یک محلول ۵ لیتری در حال انجام شدن است. اگر طی این فرایند، ۱/۱۲ لیتر ماده گازی در شرایط استاندارد مصرف شده باشد، مقدار pH محلول تولید شده چقدر خواهد بود؟

۱) ۱/۷ ۲) ۲/۷ ۳) ۱/۳ ۴) ۲/۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$4KBr + 2NO + 2H_2O + I_2 \rightarrow 2KNO_2 + 2KI + 4HBr$$

نیتروژن مونوکسید، تنها ماده گازی مصرف‌شده در این فرایند است. به ازای مصرف ۲ مول **نیتروژن مونوکسید** در این واکنش، ۴ مول **هیدروبرمیک اسید** در محلول تولید می‌شود و این ماده، تنها فراورده از واکنش موردنظر است که خاصیت اسیدی یا بازی دارد. با توجه به معادله واکنش مورد نظر، مقدار مول هیدروبرمیک اسید تولید شده در محلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?mol\,HBr = 1/12L\,NO \times \frac{1mol\,NO}{22/4L\,NO} \times \frac{4mol\,HBr}{2mol\,NO} = 0/1mol$$

طبق فرض سؤال، واکنش مورد نظر در محلول ۵ لیتری در حال انجام شدن است. بر این اساس، غلظت **هیدروبرمیک اسید** و **غلظت یون هیدروژن** را در این محلول محاسبه می‌کنیم:

$$[HBr]=\frac{\text{مول HBr}}{\text{لیتر محلول}}=\frac{۰/۱\,\text{mol HBr}}{۵\,\text{L محلول}}=۰/۰۲\,\text{mol.L}^{-۱}\xrightarrow{\text{اسید قوی است}}[H^+]=۰/۰۲\,\text{mol.L}^{-۱}$$

در قدم آخر، مقدار pH محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$pH=-\log[H^+]=-\log(۰/۰۲)=۱/۷$$

۸۱- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) دمای جوش فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره زمین، بالاتر از دمای جوش یک نمونه از گاز اکسیژن است.
۲) روند تغییر دما و فشار در لایه‌ای از هواکره که بخش عمده گاز اوزون در آن قرار دارند، برعکس هم است.
۳) گاز نیتروژن، در ساختار مولکولی خود دارای یک پیوند سه‌گانه بوده و از آن در صنعت سرماسازی استفاده می‌شود.
۴) به منظور افزایش ماندگاری مواد خوراکی، می‌توان از گاز نیتروژن و یا گاز آرگون برای بسته‌بندی این مواد استفاده کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

۱. دمای جوش آرگون به‌عنوان فراوان‌ترین گاز موجود در هواکره از دمای جوش گاز اکسیژن کمتر است.

۲. در لایه استراتوسفر روند تغییرات فشار کاهشی ولی روند تغییرات دما افزایشی است.

۳. گاز نیتروژن که در صنعت سرماسازی استفاده می‌شود در ساختار خود پیوند سه‌گانه دارد.

۴. گاز نیتروژن و آرگون هر دو واکنش‌پذیری کمی دارند و می‌توان از آن‌ها به‌منظور افزایش ماندگاری مواد خوراکی استفاده کرد.

آرگون، نئون و هلیم، به‌ترتیب، سه گاز نجیب فراوان‌تر موجود در هواکره هستند. دمای جوش فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره زمین (گاز آرگون)، در حدود ۱۸۶- درجه سانتی‌گراد و دمای جوش یک نمونه از گاز اکسیژن در حدود ۱۸۳- درجه سانتی‌گراد است. گازهای موجود در یک نمونه از هوای پاک و خشک در لایه تروپوسفر و درصد حجمی این گازها، به شرح زیر هستند:

گاز	فرمول شیمیایی	درصد حجمی	رتبه از نظر فراوانی	
نیتروژن	$N_۲$	۷۸	۱	
اکسیژن	$O_۲$	۲۱	۲	
آرگون	Ar	۰/۹۲	۳	(۱) گاز نجیب
کربن‌دی‌اکسید	$CO_۲$	۰/۰۳۸	۴	
نئون	Ne	۰/۰۰۱۸	۵	(۲) گاز نجیب
هلیم	He	۰/۰۰۰۵	۶	(۳) گاز نجیب
کریپتون	Kr	۰/۰۰۰۱	۷	(۴) گاز نجیب

هواکره

هواکره، همانند هاله‌ای آبی‌رنگ در اطراف زمین قرار گرفته است. هواکره سرشار از هوای پاک بوده و وظایف زیر را به عهده دارد:

۱) گرمای خورشید را در خود نگه می‌دارد.

۲) آب را در سرتاسر سیارهٔ ما توزیع می‌کند.

۳) ساکنان زمین را از پرتوهای خطرناک کیهانی (از جمله پرتوهای فرابنفش) محافظت می‌کند.

در میان سیاره‌های موجود در سامانه خورشیدی (منظومه شمسی)، تنها زمین اتمسفری دارد که امکان زندگی را روی آن فراهم می‌کند. اتمسفر زمین، مخلوطی از گازها است که تا فاصله ۵۰۰km از سطح زمین امتداد دارد. اگر زمین را به سیب تشبیه کنیم، ضخامت هواکره نسبت به زمین به نازکی پوست سیب می‌ماند. جاذبه زمین، گازهای موجود در اتمسفر را پیرامون خود نگه می‌دارد و مانع از خروج آن‌ها از اتمسفر می‌شود. انرژی گرمایی مولکول‌های گازی موجود در اتمسفر نیز سبب می‌شود تا پیوسته آن‌ها در حال جنبش باشند و در سرتاسر هواکره توزیع شوند. توجه داریم که اغلب (نه همه!) گازهای موجود در هواکره نامرئی هستند به‌طوری‌که ما هوا را نمی‌توانیم ببینیم و به‌طور معمول، وجود آن را حس نمی‌کنیم، مگر روزهایی که باد می‌وزد یا در مکان‌هایی که هوا به‌خوبی در جریان است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) بخش عمده مولکول‌های اوزون در استراتوسفر (لایه دوم هواکره) قرار دارد. در لایه استراتوسفر، با **افزایش ارتفاع، دما افزایش** می‌یابد. در کل لایه‌های هواکره نیز با **افزایش ارتفاع، فشار کاهش** می‌یابد.

استراتوسفر

در رابطه با لایه استراتوسفر، به نکات زیر توجه کنید:

- از ارتفاع تقریبی ۱۲ کیلومتر شروع و تا ارتفاع ۵۰ کیلومتر ادامه دارد. بر این اساس، می‌توان گفت ضخامت تقریبی این لایه در حدود ۳۸ کیلومتر است.
- با افزایش ارتفاع در این لایه، دما افزایش می‌یابد؛ به‌طوری‌که دما از $-55^\circ C$ (در ابتدای لایه) به $7^\circ C$ (در انتهای لایه) می‌رسد.
- بیشتر مولکول‌های اوزون (O_3) موجود در لایه‌های هواکره، در این لایه وجود دارند. البته مولکول‌های اوزون در لایه تروپوسفر نیز وجود دارند (اوزون تروپوسفری) ولی ماده مورد نظر در این لایه، یک گاز آلاینده و مضر به حساب می‌آید؛ درحالی‌که اوزون موجود در استراتوسفر، مانع از ورود بخش عمده‌ای از تابش فرابنفش خورشید به سطح زمین می‌شود و نقش محافظتی ایفا می‌کند.

۳) گاز نیتروژن، اصلی‌ترین جزء سازنده هواکره بوده و در ساختار مولکولی خود دارای یک پیوند سه‌گانه $N\equiv N$ است. از گاز نیتروژن، در صنعت سرماسازی و به منظور منجمد کردن مواد غذایی استفاده می‌شود. علاوه بر صنعت سرماسازی، از گاز نیتروژن برای پرکردن تایر خودروها و برای نگهداری نمونه‌های بیولوژیک در پزشکی نیز استفاده می‌شود.

۴) چون واکنش‌پذیری گاز نیتروژن و آرگون کمتر از واکنش‌پذیری گاز اکسیژن است، به منظور افزایش ماندگاری مواد خوراکی، می‌توان از گازهای **نیتروژن** و **آرگون** برای بسته‌بندی این مواد استفاده کرد.

ماز

۸۲- ارتفاع لایهٔ تروپوسفر برابر با ۱۱/۵ کیلومتر است. اگر میانگین دما در سطح زمین در حدود $14^\circ C$ در نظر گرفته شود و به ازای هر کیلومتر افزایش ارتفاع در لایهٔ استراتوسفر، ۲/۵ درجهٔ سلسیوس افزایش دما رخ دهد، دما در ارتفاع ۳۱/۱ کیلومتری هواکره برابر با چند کلوین می‌شود؟

۱) ۲۵۴ ۲) ۲۴۸ ۳) ۲۶۷ ۴) ۲۶۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۰ ـ ۱۰۰۲)

با توجه به روند تغییر دما در هواکره، می‌توان گفت هواکره ساختار لایه‌ای دارد. ابتدا تغییر دما را در لایهٔ تروپوسفر حساب می‌کنیم:

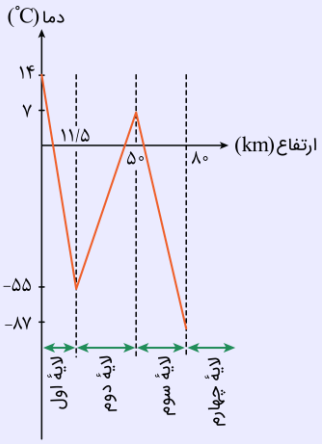
$$\text{تغییر دما}: ?^\circ C = 11/5\,km \times \frac{-6^\circ C}{1\,km} = -69^\circ C$$

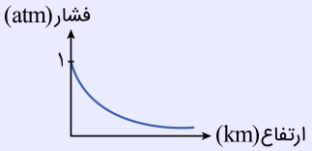
بنابراین دما در انتهای لایهٔ تروپوسفر برابر خواهد بود با:

$$\text{دما در انتهای لایهٔ تروپوسفر} = \text{دما در سطح زمین} + \text{تغییر دما} = 14 - 69 = -55^\circ C$$

تغییر دما و فشار در هواکره

روند تغییر دما و فشار در طول لایه‌های هواکره به‌صورت زیر است:





در رابطه با این لایه‌ها داریم:

- لایه اول (تروپوسفر): نزدیک‌ترین لایه به زمین است و از سطح زمین تا ارتفاع ۱۲-۱۰ کیلومتر (تقریباً ۱۱/۵ کیلومتر) قرار دارد. حدود ۷۵٪ از جرم هواکره را شامل می‌شود و تغییرات آب و هوایی در این منطقه رخ می‌دهد.
- لایه دوم (استراتوسفر): در ارتفاع ۱۱ تا ۵۰ کیلومتری قرار دارد و لایه اوزون در این بخش قرار گرفته است. در این لایه به‌طور کلی دما افزایش می‌یابد و از $-۵۵°C$ به $۷°C$ می‌رسد.
- لایه سوم: در ارتفاع ۵۰ تا ۸۰ کیلومتری قرار دارد. در طول این لایه، به‌طور کلی دما کاهش می‌یابد و از $۷°C$ به $-۸۷°C$ می‌رسد.
- لایه چهارم: در ارتفاع ۸۰ تا حدود ۵۰۰ کیلومتری قرار دارد؛ پس ضخیم‌ترین لایهٔ هواکره است. به‌طور کلی دمای آن از $-۸۷°C$ که سردترین دمای هواکره است، شروع می‌شود.

ارتفاع تروپوسفر برابر با ۱۱/۵ کیلومتر بوده و ارتفاع مدنظر ما، برابر با ۳۱/۱ کیلومتر است. باید ارتفاع این نقطه در استراتوسفر را محاسبه کنیم.

$$\text{ارتفاع در استراتوسفر} = ۳۱/۱ - ۱۱/۵ = ۱۹/۶\text{km}$$

در قدم بعد، میزان تغییر دما را در لایهٔ استراتوسفر حساب می‌کنیم:

$$\text{تغییر دما}: ?°C = ۱۹/۶\text{km} \times \frac{+۲/۵°C}{۱\text{km}} = +۴۹°C$$

بنابراین دما در لایهٔ استراتوسفر برابر خواهد بود:

$$\text{دما در لایهٔ استراتوسفر} = \text{دما در انتهای لایهٔ تروپوسفر} + \text{تغییر دما} = -۵۵ + ۴۹ = -۶°C$$

در نهایت دمای به‌دست آمده را بر حسب کلوین محاسبه می‌کنیم:

$$T(K) = \theta(°C) + ۲۷۳ = (-۶) + ۲۷۳ = ۲۶۷K$$

یکای دما

یکای رایج دما، درجه سلسیوس ($°C$) است؛ درحالی‌که یکای دما در SI، کلوین (K) است. دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس با نماد θ و در مقیاس کلوین با نماد T نشان داده می‌شود. توجه داریم که رابطهٔ بین این دو مقیاس دمایی به‌صورت $T(K) = \theta(°C) + ۲۷۳$ است. با توجه به این رابطه، ارزش دمایی $1°C$ با ارزش دمایی $1K$ برابر خواهد بود؛ پس تغییر دمای یک جسم در مقیاس سلسیوس ($\Delta\theta$) برابر با میزان تغییر دمای آن جسم در مقیاس کلوین (ΔT) است.

ماز

۸۳- کدام مطلب در رابطه با گاز هلیم نادرست است؟

۱) برخلاف سایر گازهای نجیب، عنصری از دسته s جدول دوره‌ای است.

۲) در مقایسه با سایر گازهای نجیب، درصد فراوانی بیشتری در سیاره مشتری دارد.

۳) در هر نمونه به حجم یک مترمکعب از گاز طبیعی، تقریباً ۷ لیتر از این گاز نجیب وجود دارد.

۴) دمای جوش یک نمونه از این گاز در مقایسه با دمای جوش یک نمونه از گاز آرگون کمتر است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

درصد حجمی گاز هلیوم در گاز طبیعی حدود ۷ درصد است؛ یعنی در هر مترمکعب از گاز طبیعی که ۱۰۰۰ لیتر می‌شود، حدود ۷۰ لیتر گاز هلیم وجود دارد. سایر گزینه‌ها درباره هلیم با توجه به کتاب درسی درست است.

هلیم با نماد شیمیایی He، نوعی گاز نجیب به‌شمار می‌رود. مقدار گازهای نجیب مانند **هلیم**، **نئون**، **آرگون**، **کریپتون** و **زنون** در هواکره **بسیار کم** است و به همین دلیل، این مواد به **گازهای کمیاب** نیز معروف هستند. توجه داریم که منابع زیرزمینی هلیم از هواکره سرشارتر و برای تولید هلیم در مقیاس صنعتی مناسب‌تر هستند. یافته‌های تجربی نشان می‌دهد که حدود ۷ درصد حجمی از مخلوط گاز طبیعی را هلیم تشکیل می‌دهد. بر این اساس، می‌توان گفت در هر نمونه به حجم یک مترمکعب (معادل با ۱۰۰۰ لیتر) از گاز طبیعی، تقریباً ۷۰ لیتر از گاز **هلیم** وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آرایش الکترونی هلیم، به زیرلایه $1s^2$ ختم می‌شود، پس هلیم عنصری از دسته s جدول دوره‌ای است. به‌جز هلیم، سایر گازهای نجیب متعلق به دسته p بوده و آرایش الکترونی آن‌ها به زیرلایه p ختم می‌شود.

۲) سیاره مشتری، به‌صورت عمده، از گاز ساخته شده است. هلیم، فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در ساختار سیاره مشتری بوده و پس از گاز هیدروژن، بیشترین مقدار فراوانی را در این سیاره دارد.

۴) دمای جوش هلیم در حدود ۲۶۹- درجه و دمای جوش آرگون در حدود ۱۸۶- درجه سلسیوس است.

هلیم

نمودار زیر، کاربردهای گاز هلیم را نشان می‌دهد:



کاربردهای گاز هلیم

- خنک کردن قطعات دستگاه‌های تصویربرداری پزشکی
- پر کردن کپسول‌های غواصی
- ایجاد محیط بی‌اثر در جوشکاری
- پر کردن بالن‌های هواشناسی، تفریحی و تبلیغاتی

ماز

۸۴- کدام موارد از عبارت‌های زیر در رابطه با تقطیر هوای مایع درست هستند؟

الف ـ با عبور هوای مایع از ستون تقطیر، اتم‌های هلیم موجود در آن به‌عنوان اولین جزء از مخلوط مورد نظر خارج می‌شوند.

ب ـ در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، هرچه نقطهٔ جوش یک ماده بالاتر باشد، دیرتر از ستون تقطیر خارج می‌شود.

ج ـ در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، دمای هوا را تا حدود ۷۳ کلوین کاهش داده و سپس افزایش می‌دهند.

د ـ با کاهش دمای هوا تا صفر درجه سلسیوس، رطوبت موجود در هوا به حالت مایع از آن جدا می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ خط‌به‌خط و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

✗ الف) هلیم در مخلوط هوای مایع وجود ندارد.

✓ ب) در فرآیند جداسازی گاز از هوای مایع ابتدا گازی که نقطه جوش پایین‌تری دارد جدا می‌شود و گازهای با نقطه جوش بالاتر دیرتر از آن خارج می‌شوند.

✓ ج) در فرآیند تغییر جزءبه‌جزء هوای مایع دما را تا حدود منفی ۲۰۰ درجه سانتی‌گراد یعنی دمای ۷۳ کلوین کاهش می‌دهند.

✗ د) با کاهش دمای هوا تا صفر درجه سلسیوس، رطوبت موجود در آن به حالت جامد جدا می‌شود.

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) با عبور هوای مایع از ستون تقطیر، مولکول‌های نیتروژن موجود در آن به‌عنوان اولین جزء از مخلوط مورد نظر خارج می‌شوند. توجه داریم که چون نقطه جوش هلیم (در حدود ۲۶۹- درجه سانتی‌گراد) کمتر از دمای هوای مایع (در حدود ۲۰۰- درجه سانتی‌گراد) است، این ماده در مخلوط هوای مایع وجود ندارد و طی فرایند تهیه هوای مایع اصلاً به حالت مایع درنمی‌آید.

ب) در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، هر چه نقطهٔ جوش یک ماده بالاتر باشد، آن ماده دیرتر تبخیر شده و بر این اساس، دیرتر از ستون تقطیر خارج می‌شود. برای مثال، در رابطه با هوای مایع متشکل از نیتروژن، اکسیژن و آرگون، داریم:

اکسیژن > آرگون > نیتروژن : نقطهٔ جوش

اکسیژن ← آرگون ← نیتروژن :ترتیب جدا شدن گازها

تقطیر هوای مایع

به فرایندی که در آن یک ماده ابتدا تبخیر شده و پس از آن میعان می‌شود و یا بالعکس، تقطیر گفته می‌شود. با توجه به تفاوت در دمای جوش مواد مختلف، از فرایند تقطیر برای جداسازی مواد بر اساس تفاوت در نقطه جوش آن‌ها استفاده می‌شود. هوا، مخلوطی از انواع گازها است. برای جداسازی مواد سازنده هوا، از تقطیر استفاده می‌شود. در این فرایند، مراحل زیر انجام می‌شود:

۱) هوا را از صافی‌هایی عبور می‌دهند تا گرد و غبار آن گرفته شود.

۲) با استفاده از تغییر فشار، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند. با کاهش دما تا $0^\circ C$، بخار آب (رطوبت) موجود در هوا به‌صورت یخ درآمده و از آن خارج می‌شود. با کاهش دما تا $-78^\circ C$، گاز CO_2 نیز به حالت جامد در می‌آید.

۳) با سرد کردن بیشتر هوا تا $-200^\circ C$، مخلوط سردی از چند مایع پدید می‌آید که به آن هوای مایع می‌گویند.

۴) پس از تولید هوای مایع، با عبور آن از یک ستون تقطیر، گازهای سازنده آن جداسازی و در ظرف‌های جدا ذخیره می‌شوند.

ج) در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، دمای هوا را تا حدود ۷۳ کلوین، معادل با -200 درجه سلسیوس کاهش داده و یک مخلوط مایع از آرگون، نیتروژن و اکسیژن را ایجاد می‌کنند. در مرحله بعد، دمای مخلوط مایع هوا را افزایش می‌دهند.

د) با کاهش دمای هوا تا صفر درجه سانتی‌گراد، رطوبت موجود در هوا به‌عنوان اولین جزء، به‌صورت یخ از مخلوط هوا خارج می‌شود. توجه داریم که دمای صفر درجه سانتی‌گراد معادل با نقطه ذوب یخ است.

۸۵- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) گیاهان گازهای CO_2 و N_2 موجود در هواکره را مستقیماً جذب کرده و اکسیژن مورد نیاز جانداران را تولید می‌کنند.

۲) آرگون، به‌عنوان محیط بی‌اثر در جوشکاری فلزها کاربرد داشته و برخلاف کربن مونوکسید، گازی بی‌رنگ و بی‌بو است.

۳) در ترکیب حاصل از واکنش فراوان‌ترین گاز موجود در هواکره با پتاسیم، شمار کاتیون‌ها ۳ برابر شمار آنیون‌ها است.

۴) نماد $\xrightarrow{10atm}$ در واکنش‌های شیمیایی، بیانگر این است که با انجام واکنش، فشار محیط به ۱۰ اتمسفر می‌رسد.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

✗ ۱. گیاهان گاز نیتروژن را به‌طور مستقیم جذب نمی‌کنند.

✗ ۲. کربن مونوکسید همانند آرگون یک گاز بی‌رنگ و بی‌بو است.

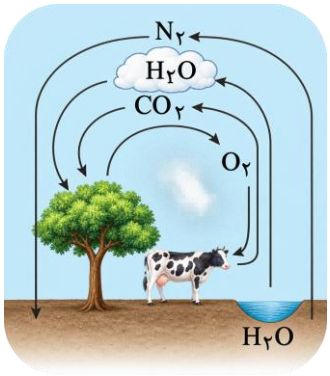
✓ ۳. در ترکیب پتاسیم نیترید شمار کاتیون‌ها سه برابر آنیون‌ها است.

✗ ۴. این نماد نشان می‌دهد واکنش در فشار ۱۰ اتمسفر انجام می‌شود.

ترکیب حاصل از واکنش میان فراوان‌ترین گاز موجود در هواکره (نیتروژن) با فلز پتاسیم، پتاسیم نیترید با فرمول شیمیایی K_3N است. در ساختار این ترکیب، یون‌های نیترید و پتاسیم وجود دارند. توجه داریم که شمار کاتیون‌ها در این ترکیب، ۳ برابر شمار آنیون‌ها است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) گیاهان با استفاده از نور خورشید و مصرف گاز CO_2 هواکره، طی فرایند فتوسنتز، اکسیژن مورد نیاز جانداران را تولید می‌کنند. توجه داریم که گیاهان به‌طور مستقیم توانایی جذب گاز N_2 از هواکره را ندارند و نیتروژن مورد نیاز خود را با کمک باکتری‌های موجود در خاک تأمین می‌کنند. تصویر زیر، برهمکنش هواکره با زیست‌کره را نشان می‌دهد:



۲) گاز آرگون، سومین عضو از خانواده گازهای نجیب (عناصر موجود در گروه ۱۸ جدول دوره‌ای) بوده و عدد اتمی آن برابر با ۱۸ است. آرگون، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و غیرسمی است که از آن برای ساخت لامپ رشته‌ای استفاده می‌شود. علاوه بر این، از گاز آرگون به‌عنوان محیط بی اثر در جوشکاری و برش فلزها نیز استفاده می‌شود. این گاز در پتروشیمی شیراز از تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع با خلوص بسیار زیاد تهیه می‌شود. گاز کربن مونوکسید نیز مشابه با گاز آرگون، یک گاز **بی‌رنگ** و **بی‌بو** است. توجه داریم که گاز کربن مونوکسید، یک گاز **بسیار سمی** به شمار می‌رود.

کربن مونوکسید

در رابطه با گاز کربن مونوکسید، به مطالب زیر توجه کنید:

- ساختار لوویس آن به‌صورت زیر است:

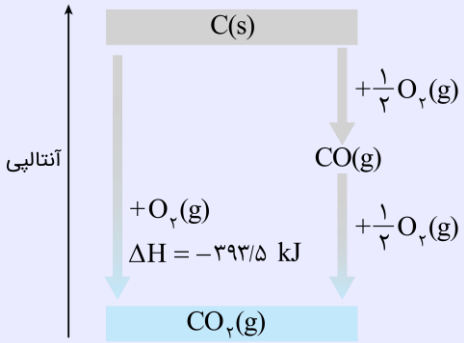
$$:C \equiv O:$$

در ساختار این مولکول، ۳ جفت الکترون پیوندی و ۲ جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد. گاز CO یا کربن‌مونوکسید از سوختن ناقص سوخت‌ها تولید می‌شود. این گاز بی‌رنگ، بی‌بو و بسیار سمّی است.

- کربن‌مونوکسید از مخلوط کربن و اکسیژن پایدارتر و از کربن‌دی‌اکسید ناپایدارتر است؛ به‌طوری‌که کربن‌مونوکسید تولید شده در سوختن ناقص، در حضور اکسیژن و در شرایط مناسب، دوباره می‌سوزد و به کربن‌دی‌اکسید تبدیل می‌شود:

$$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$$

- نمودار انرژی واکنش سوختن یک نمونه از کربن و مراحل انجام شدن آن به‌صورت زیر است:



- میل ترکیبی هموگلوبین خون با این گاز بسیار زیاد و بیش از ۲۰۰ برابر اکسیژن است. مولکول‌های این گاز پس از اتصال به هموگلوبین از رسیدن اکسیژن به بافت‌های بدن جلوگیری می‌کنند. این ویژگی باعث مسمومیت می‌شود و سامانه عصبی را فلج می‌کند؛ به‌طوری‌که قدرت هرگونه اقدامی را از فرد مسموم می‌گیرد و بدین ترتیب باعث مرگ می‌شود.
- چگالی این گاز کمتر از هوا و قابلیت انتشار آن در محیط، بسیار زیاد است؛ به‌طوری‌که به سرعت در همهٔ فضای اتاق پخش می‌شود.

۴) جدول زیر برخی از نمادهای مورد استفاده در معادله‌های شیمیایی را نمایش می‌دهد:

نماد	معنا
$\rightarrow$	تولید می‌کند یا می‌دهد.
$\xrightarrow{\Delta}$	واکنش‌دهنده‌ها بر اثر گرم شدن واکنش می‌دهند.
$\xrightarrow{۲۰atm}$	واکنش در فشار ۲۰ اتمسفر انجام می‌شود.
$\xrightarrow{۱۲۰۰^\circ C}$	واکنش در دمای $۱۲۰۰^\circ C$ انجام می‌شود.
$\xrightarrow{Pd}$	در واکنش از کاتالیزگر پالادیم استفاده شده است.

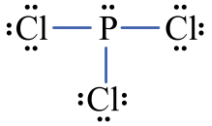
ماز

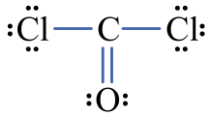
۸۶- شمار جفت الکترون‌های پیوندی در دو گونه داده شده در کدام گزینه، متفاوت از یکدیگر است؟

۱) $SO_۳$ و کربن تتراکلرید
۲) کربن مونوکسید و $SO_۲$
۳) فسفر تری‌کلرید و $COCl_۲$
۴) $N_۲$ و اوزون

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۰۰۲)

ساختار فسفر تری‌کلرید با فرمول شیمیایی $PCl_۳$ و ساختار $COCl_۲$، به‌صورت زیر است:

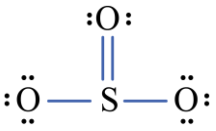


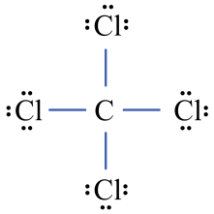


در ساختار $COCl_۲$، تعداد ۴ جفت الکترون پیوندی و در ساختار $PCl_۳$ نیز ۳ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

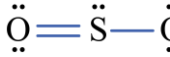
۱) ساختار دو ترکیب $SO_۳$ و کربن تتراکلرید با فرمول شیمیایی $CCl_۴$، به‌صورت زیر است:





در ساختار این دو گونه، ۴ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

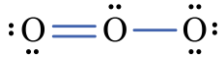
۲) ساختار کربن مونوکسید با فرمول شیمیایی CO و ساختار $SO_۲$، به‌صورت زیر است:





در ساختار این دو ترکیب، ۳ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

۴) ساختار مولکول‌های $N_۲$ و اوزون با فرمول شیمیایی $O_۳$، به‌صورت زیر است:



در ساختار مولکولی این دو ماده، ۳ جفت الکترون پیوندی وجود دارد.

ماز

۸۷- در یک کارخانه، از مخلوط نفت و گاز طبیعی برای تأمین ۱۰ مگاوات ساعت انرژی مصرفی در هر روز استفاده می‌شود. اگر از دودکش این کارخانه در طول هر ماه ۱۶۹/۲ تن گاز CO_2 خارج شود، چند درصد از برق مصرف‌شده در این کارخانه توسط سوزاندن گاز طبیعی تأمین می‌شود؟ (به ازای تولید هر کیلووات ساعت انرژی با استفاده از گاز طبیعی و نفت، به‌ترتیب ۰/۳۶ و ۰/۷ کیلوگرم گاز CO_2 تولید می‌شود.)

۱) ۷۵ ۲) ۶۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۰۰۲)

هر ماه را معادل با ۳۰ روز در نظر می‌گیریم. اگر از دودکش‌های این کارخانه در طول هر ماه ۱۶۹/۲ تن گاز CO_2 خارج شود، میزان گاز CO_2 خروجی در طول یک روز برابر با ۵/۶۴ تن یا ۵۶۴۰ کیلوگرم خواهد بود. همچنین، طبق فرض سؤال می‌دانیم که در این کارخانه، روزانه ۱۰ مگاوات ساعت انرژی، معادل با 10^4 کیلووات ساعت انرژی تولید می‌شود؛ بنابراین مقدار CO_2 تولیدی به ازای تولید هر کیلووات ساعت انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,kg\,CO_2 = 1\,kWh_{\text{برق}} \times \frac{5640\,kg\,CO_2}{10^4\,kWh_{\text{برق}}} = 0/564\,kg$$

اگر مقدار انرژی تولید شده توسط گاز طبیعی و نفت به ازای تولید هر کیلووات ساعت انرژی را به‌ترتیب معادل با x و y در نظر بگیریم، مقدار گاز CO_2 تولید شده با استفاده از گاز طبیعی برابر با $0/36x$ و مقدار گاز CO_2 تولید شده با استفاده از نفت برابر با $0/7y$ کیلوگرم خواهد بود. از طرفی، مجموع مقادیر مؤلفه‌های x و y نیز برابر با ۱ خواهد بود، چراکه در کارخانه مورد نظر ۱ کیلووات ساعت انرژی به ازای تولید ۰/۵۶۴ کیلوگرم گاز کربن‌دی‌اکسید به‌دست آمده است. بر این اساس، داریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 0/36x+0/7y=0/564 \end{cases} \Rightarrow x=0/4\,,\ y=0/6$$

با توجه به محاسبات بالا، از هر کیلووات ساعت انرژی تولید شده در کارخانه، ۰/۶ کیلووات ساعت آن توسط نفت و ۰/۴ کیلووات ساعت آن توسط گاز طبیعی تولید شده است. بنابراین برای محاسبه درصد برق تولیدی این کارخانه با استفاده از گاز طبیعی، به این روش عمل می‌کنیم:

$$\text{درصد برق تولیدشده توسط گاز طبیعی} = \frac{0/4}{0/4+0/6} \times 100 = 40 \text{ درصد}$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، ۴۰ درصد برق تولیدی این کارخانه با استفاده از گاز طبیعی تأمین می‌شود.

ردپای کربن‌دی‌اکسید

زندگی هر فرد، میزان اثرگذاری متفاوتی روی کره زمین دارد که به آن ردپا گفته می‌شود. یکی از این ردپاها، ردپای CO_2 است. ردپای CO_2 نشان می‌دهد در تولید یک محصول یا بر اثر انجام یک فعالیت، چه مقدار از این گاز تولید و وارد هواکره می‌شود. برای اینکه مقدار گاز CO_2 در هواکره از مقدار طبیعی آن فراتر نرود، باید مقدار اضافی این گاز به وسیله گیاهان یا دیگر پدیده‌های طبیعی مصرف شود. طبیعت به کمک گیاهان، گاز CO_2 موجود در هواکره را مصرف می‌کند. بر این اساس، یکی از راهکارهای کاهش ردپای کربن‌دی‌اکسید، کاشت و مراقبت از درختان است. با افزایش قطر تنه درختان، توانایی آن‌ها در جذب گاز کربن‌دی‌اکسید افزایش پیدا می‌کند.

۸۸- کدام‌یک از مطالب زیر نادرست است؟

۱) مقدار گاز اکسیژن در لایه‌های مختلف هواکره با هم تفاوت داشته و این عنصر، در ساختار مولکول پروتئین‌ها یافت می‌شود.
۲) سنگ معدن آلومینیم، بوکسیت نام داشته و این ماده، نمونه ناخالص از فلز آلومینیم است که به رنگ قهوه‌ای دیده می‌شود.
۳) نام ترکیب‌هایی با فرمول شیمیایی Ag_2S و N_2O، به‌ترتیب به‌صورت نقره سولفید و دی‌نیتروژن مونوکسید است.
۴) اولین مرحله در تهیه صنعتی سولفوریک‌اسید، انجام واکنش سوختن گوگرد است.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۸ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

بوکسیت نمونه‌ای ناخالص از اکسید فلز آلومینیم (نه خود فلز آلومینیم) است.

سنگ معدن آلومینیم، بوکسیت نام داشته و این ماده نمونه ناخالصی از آلومینیم اکسید (Al_2O_3) است که به **رنگ قهوه‌ای** دیده می‌شود. تصویر زیر، نمایی از سنگ معدن بوکسیت را نشان می‌دهد:



توجه داریم که در ساختار **سنگ معدن بوکسیت**، خود فلز **آلومینیم** به حالت عنصری یافت نشده و این فلز در ساختار ترکیب **آلومینیم اکسید** قرار گرفته است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

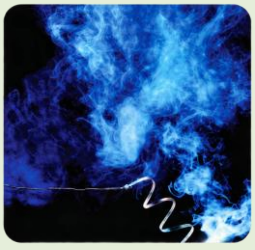
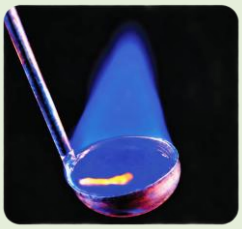
۱) اکسیژن، یکی از مهم‌ترین گازهای تشکیل‌دهندهٔ هواکره است که زندگی روی زمین به وجود آن گره خورده است. برای مثال، بسیاری از واکنش‌های شیمیایی مانند فرسایش سنگ و صخره، زنگ زدن، سوختن انواع مواد سوختنی و فساد مواد غذایی که پیوسته پیرامون ما رخ می‌دهند، به دلیل تمایل زیاد گاز اکسیژن برای انجام واکنش‌های شیمیایی است. این عنصر در زیست‌کره در ساختار همهٔ مولکول‌های زیستی مانند کربوهیدرات‌ها، چربی‌ها، ویتامین‌ها و پروتئین‌ها یافت می‌شود. در هواکره نیز این گاز به‌طور عمده به شکل مولکول‌های دواتمی وجود دارد. گاز اکسیژن، در همه لایه‌های هواکره یافت می‌شود، هرچند مقدار این گاز در لایه‌های گوناگون هواکره با هم تفاوت دارد.

۳) نام ترکیب‌هایی با فرمول شیمیایی Ag_2S و N_2O، به‌ترتیب به‌صورت نقره سولفید و دی‌نیتروژن مونوکسید است. توجه داریم که ترکیبی با فرمول شیمیایی Ag_2S، یک ترکیب یونی دوتایی بوده و در ساختار آن کاتیون Ag^+ و آنیون S^{2-} وجود دارد. چون فلز نقره فقط یک نوع کاتیون با بار ۱+ را ایجاد می‌کند، در نام‌گذاری ماده مورد نظر نیازی به بیان بار الکتریکی کاتیون وجود ندارد. ترکیبی با فرمول شیمیایی N_2O نیز از جمله مواد مولکولی به‌شمار می‌رود.

۴) در صنعت برای تهیه سولفوریک‌اسید، نخست گوگرد را در واکنش با اکسیژن به SO_2 تبدیل می‌کنند. واکنشی که به سوختن گوگرد معروف است. معادله این واکنش شیمیایی به‌صورت زیر است:

$$S(s)+O_2(g)\rightarrow SO_2(g)$$

جدول زیر، فرایند مربوط به سوختن چند عنصر مختلف را نشان می‌دهد:

مواد	سوختن منیزیم	سوختن سدیم	سوختن گوگرد
واکنش سوختن	$2Mg(s)+O_2(g)\rightarrow 2MgO(s)$	$4Na(s)+O_2(g)\rightarrow 2Na_2O(s)$	$S(s)+O_2(g)\rightarrow SO_2(g)$
نور حاصل از واکنش	سفید	زرد	آبی
تصویر			

۸۹- نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در فرمول مولکولی دی‌نیتروژن تتراکسید، چند برابر شمار الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش تولید هر واحد فرمولی از مس(II) فسفید است؟

۱) ۲ ۲) ۰/۵ ۳) ۴ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۷ ـ ۱۰۰۲)

دی‌نیتروژن تتراکسید، نوعی ترکیب مولکولی حاصل از عناصر نیتروژن و اکسیژن با فرمول شیمیایی N_2O_4 است. نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در فرمول مولکولی دی‌نیتروژن تتراکسید، برابر با ۳ است.

انواع مواد

نمودار زیر، نوع عناصر سازنده ترکیب‌ها و مواد مختلف را نشان می‌دهد:



واکنش میان عناصر		
فلز + نافلز	نافلز + نافلز	فلز + فلز
مبادله الکترون	اشتراک الکترون	ایجاد مخلوط
تولید مواد یونی	تولید مواد مولکولی	تولید آلیاژها

یکی از راه‌های رسیدن اتم‌ها به آرایش هشت‌تایی پایدار، به اشتراک گذاشتن الکترون با اتم‌های اطراف است. در این حالت، اتم‌ها الکترون‌های تک خود را به اشتراک گذاشته و این الکترون‌های تک، به‌صورت جفت‌شده درمی‌آیند. با اتصال اتم‌ها، مولکول‌ها ایجاد می‌شوند.

مس(II) فسفید نیز نوعی ترکیب یونی است که از واکنش میان مس و فسفر تولید می‌شود. در ساختار این ماده، دو یون Cu^{2+} و P^{3-} وجود دارد. فرمول شیمیایی این ماده به‌صورت Cu_3P_2 است. شمار الکترون‌های مبادله شده در فرایند تولید این ترکیب یونی نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{شمار الکترون مبادله‌شده} = \text{شمار کاتیون} \times \text{بار الکتریکی کاتیون} = ۳ \times ۲ = ۶$$

با توجه به توضیحات داده شده، نسبت شمار اتم‌ها به شمار عناصر در فرمول مولکولی دی‌نیتروژن تتراکسید، نصف شمار الکترون‌های مبادله شده در واکنش تولید هر واحد فرمولی از مس(II) فسفید است.

۹۰- کدام‌یک از مطالب زیر در رابطه با ترکیب نیکل(III) سولفید نادرست است؟

۱) در آرایش الکترونی کاتیون سازنده این ماده، ۵ زیرلایه پر از الکترون وجود دارد.

۲) تفاوت شماره گروه عناصر موجود در ساختار این ماده، برابر با شماره گروه عنصر $_{74}W$ است.

۳) آرایش الکترونی آنیون موجود در ساختار این ماده، مشابه آرایش الکترونی کاتیون منیزیم است.

۴) پس از موازنه معادله واکنش $Ni_2S_3 + H_2SO_4 \rightarrow Ni_2(SO_4)_3 + H_2S$، ضریب این ماده برابر با یک می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

نیکل(III) سولفید، نوعی ترکیب یونی است که از واکنش میان فلز نیکل و نافلز گوگرد تولید می‌شود. در ساختار این ماده، دو یون Ni^{3+} و S^{2-} وجود دارد. فرمول شیمیایی این ماده به‌صورت Ni_2S_3 است. آنیون سازنده نیکل(III) سولفید، معادل با یون سولفید بوده و این یون دارای ۱۸ الکترون است، پس آرایش الکترونی این یون مشابه آرایش الکترونی آرگون خواهد بود. توجه داریم که کاتیون منیزیم، دارای ۱۰ الکترون بوده و آرایش الکترونی آن مشابه آرایش الکترونی **نئون** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آرایش الکترونی کاتیون نیکل با بار الکتریکی ۳+، به‌صورت زیر است:

$$_{28}Ni: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2 \xrightarrow{-3e} {}_{28}Ni^{3+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7$$

در آرایش الکترونی این کاتیون، ۵ زیرلایه کاملاً پر از الکترون وجود دارد.

۲) نیکل با عدد اتمی ۲۸، متعلق به گروه شماره ۱۰ و گوگرد با عدد اتمی ۱۶، متعلق به گروه شماره ۱۶ است. تفاوت شماره گروه این دو عنصر، برابر با ۶ است. تنگستن با نماد شیمیایی $_{74}W$ نیز متعلق به تناوب ششم و گروه شماره ۶ جدول تناوبی است.

۴) معادله موازنه‌شده واکنش مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$Ni_2S_3 + 3H_2SO_4 \rightarrow Ni_2(SO_4)_3 + 3H_2S$$

همان‌طور که مشخص است، پس از موازنه معادله واکنش مورد نظر، ضریب Ni_2S_3 برابر با یک است.

۹۱- چگالی بلور مس(I) اکسید برابر با $3/36 g.cm^{-3}$ است. در مراحل تولید یک نمونه از این ترکیب به حجم $15 cm^3$، تقریباً چند عدد الکترون بین گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش مبادله می‌شود؟ $(Cu=64 , O=16 : g.mol^{-1})$

۱) $1/3\times10^{24}$ ۲) $2/6\times10^{24}$ ۳) $4/2\times10^{23}$ ۴) $8/4\times10^{23}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

واکنش تولید مس(I) اکسید، به‌صورت زیر است:

$$4Cu(s) + O_2(g) \rightarrow 4Cu^+(s) + 2O^{2-}(s) \rightarrow 2Cu_2O(s)$$

ترکیب تولید شده در این واکنش، نوعی ماده یونی است که از کنار هم قرار گرفتن **آنیون‌ها** و **کاتیون‌ها** تشکیل شده است. در فرایند تولید این ماده، هر اتم مس یک الکترون از دست داده و کاتیونی با بار ۱+ را ایجاد می‌کند. با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، به ازای مصرف شدن ۴ مول اتم مس، ۴ مول الکترون بین گونه‌ها مبادله شده است. در این واکنش شیمیایی، ۲ مول فراورده در نهایت تولید شده است. بر این اساس، داریم:

$$?e = 15 cm^3 Cu_2O \times \frac{3/36 g\, Cu_2O}{1 cm^3 Cu_2O} \times \frac{1 mol\, Cu_2O}{144 g\, Cu_2O} \times \frac{4 mol\, Cu}{2 mol\, Cu_2O} \times \frac{1 mol\, e^-}{1 mol\, Cu} \times \frac{6/02\times10^{23} e^-}{1 mol\, e^-} \simeq 4/2\times10^{23} e^-$$

با توجه به محاسبات انجام شده، طی این فرایند تقریباً $4/2\times10^{23}$ الکترون مبادله شده است.

چگالی

چگالی، جرمی که یک حجم مشخص از یک ماده دارد را به ما نشان می‌دهد. برای مثال، چگالی ۲/۷ گرم بر سانتی‌متر مکعب، به ما نشان می‌دهد که هر سانتی‌متر مکعب (هر میلی‌لیتر) از یک ماده، چه جرمی دارد. برای محاسبه چگالی، داریم:

$$\text{چگالی} = \frac{\text{جرم نمونه}}{\text{حجم نمونه}} \Rightarrow \text{جرم نمونه} = \text{حجم نمونه} \times \text{چگالی}$$

بر این اساس، خواهیم داشت:

$$\text{جرم ماده} \xrightarrow[\div \text{چگالی}]{\times \text{چگالی}} \text{حجم ماده}$$

۹۲- جرم یون نیترید موجود در ۱/۳۲ گرم کروم(III) نیترید با جرم اتم نیتروژن موجود در چند میلی‌گرم اوره برابر است؟ $(H=1 , C=12 , N=14 , O=16 , Cr=52 : g.mol^{-1})$

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۶۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۰۰۲)

کروم، فلزی از تناوب چهارم و گروه ۶ بوده و بار الکتریکی یون‌های پایدار آن معادل با ۳+ و ۲+ خواهد بود. نیتروژن نیز نافلزی از گروه پانزدهم بوده و یون پایدار آن با نام نیترید، بار ۳- دارد. پس فرمول شیمیایی کروم(III) نیترید به‌صورت CrN است. جرم مولی این ماده برابر با ۶۶ گرم بر مول است. ابتدا مقدار نیتروژن موجود در ۱/۳۲ گرم از این ماده را حساب می‌کنیم:

$$?mol\, N = 1/32 g\, CrN \times \frac{1 mol\, CrN}{66 g\, CrN} \times \frac{1 mol\, N}{1 mol\, CrN} = 0/02 mol$$

فرمول شیمیایی اوره نیز به‌صورت $CO(NH_2)_2$ است. جرم مولی این ماده نیز برابر با ۶۰ گرم بر مول است. جرم نمونه‌ای از اوره را که حاوی ۰/۰۲ مول اتم نیتروژن است، به‌دست می‌آوریم. در این رابطه، داریم:

$$?\,mg\,CO(NH_2)_2 = 0/02\,mol\,N \times \frac{1\,mol\,CO(NH_2)_2}{2\,mol\,N} \times \frac{60\,g\,CO(NH_2)_2}{1\,mol\,CO(NH_2)_2} \times \frac{1000\,mg\,CO(NH_2)_2}{1\,g\,CO(NH_2)_2} = 600\,mg$$

پس جرم نیتروژن موجود در ۱/۳۲ گرم کروم(III) نیترید با جرم نیتروژن موجود در ۶۰۰ میلی‌گرم اوره برابر است.

کودهای نیتروژن‌دار

با توجه به روند رو به افزایش جمعیت جهان و محدودیت منابع، تأمین غذای مردم جهان به یکی از چالش‌های زندگی تبدیل شده است. بهترین راه‌حل برای غلبه بر این چالش، افزایش بهره‌وری در تولید فراورده‌های کشاورزی است که با شناسایی، تولید و افزودن کودهای شیمیایی مناسب به خاک، می‌تواند محقق شود. یکی از عناصر مورد نیاز گیاهان برای رشد، نیتروژن است. هر چند که در حدود ۸۰٪ از حجم هوا توسط گاز نیتروژن تشکیل شده است، اما گیاهان نمی‌توانند این عنصر ضروری برای رشد خود را به‌طور مستقیم از هوا جذب کنند. به همین خاطر، نیتروژن را باید در قالب ترکیبات نیتروژن‌دار از جمله آمونیاک و اوره به خاک افزود. به‌عنوان مثال، در برخی از کشورها آمونیاک مایع را به‌عنوان کود شیمیایی به‌طور مستقیم به خاک تزریق می‌کنند.

۹۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ کربن‌دی‌اکسید، گوگرد تری‌اکسید و بخار آب، از جمله آلاینده‌های حاصل از واکنش سوختن زغال‌سنگ هستند.

ب ـ شمار پیوندهای اشتراکی در اوره، ۲ برابر شمار این پیوندها در فراوان‌ترین ترکیب سازنده هوای خشک است.

ج ـ نوع فراورده‌های سوختن سوخت‌های فسیلی از جمله زغال‌سنگ، به مقدار اکسیژن در دسترس بستگی دارد.

د ـ همه آلاینده‌هایی که از اگزوز خودروها خارج می‌شوند، از جمله مواد مولکولی بوده و خاصیت اسیدی دارند.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳　　**(متوسط ـ مفهومی و خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۰۰۲)**

بررسی سریع:

✗ الف) از سوختن زغال‌سنگ علاوه بر کربن دی‌اکسید و بخار آب، گاز گوگرد دی‌اکسید (نه گوگرد تری اکسید!) تولید می‌شود.

✓ ب) نسبت شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اوره (۸ پیوند)، ۲ برابر شمار پیوندها در ساختار فروان‌ترین ترکیب موجود در هوا، یعنی کربن دی اکسید است. (۴ پیوند)

✓ ج) تولید یا عدم تولید کربن مونوکسید در سوختن سوخت‌های فسیلی، به مقدار اکسیژن در دسترس بستگی دارد.

✗ د) هیدروکربن‌ها از جمله آلاینده‌های خروجی اگزوز خودروها هستند که خاصیت اسیدی ندارد.

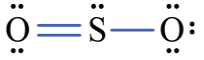
عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

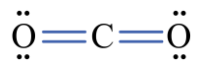
الف) **کربن‌دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید** و **بخار آب**، از جمله مواد فراورده حاصل از **واکنش سوختن زغال‌سنگ** هستند. معادله نوشتاری سوختن زغال سنگ به‌صورت زیر است:

نور + گرما + کربن‌دی‌اکسید + گوگرد دی‌اکسید + بخار آب ⟶ اکسیژن + زغال‌سنگ

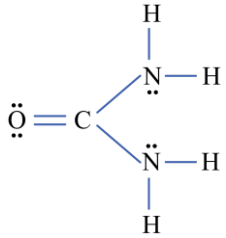
توجه داریم که در این واکنش، گوگرد تری‌اکسید تولید نمی‌شود. گوگرد دی‌اکسید، اکسیدی از گوگرد با ساختار زیر است:



ب) فراوان‌ترین ترکیب موجود در هوای پاک و خشک، گاز کربن‌دی‌اکسید با ساختار لوویس زیر است:



ساختار مولکولی اوره نیز به‌صورت زیر خواهد بود:



در ساختار مولکول اوره، ۸ پیوند اشتراکی و در ساختار کربن‌دی‌اکسید، ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد.

ج) نوع فراورده‌ها در واکنش سوختن سوخت‌های فسیلی از جمله زغال سنگ، گاز طبیعی و بنزین، به مقدار اکسیژن در دسترس بستگی دارد. اگر اکسیژن کافی در دسترس باشد، سوختن کامل انجام می‌شود و گاز کربن‌دی‌اکسید و بخار آب تولید می‌گردد. این در حالی است که اگر مقدار اکسیژن کم باشد، گاز کربن مونوکسید به همراه دیگر فراورده‌ها تولید خواهد شد. در این حالت، گفته می‌شود **سوختن ناقص** انجام شده است. با سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی، حتی **رنگ** و **دمای شعله** حاصل از سوختن این مواد هم می‌تواند تغییر کند.

انواع واکنش سوختن

نوع فراورده‌های واکنش سوختن، به مقدار اکسیژن در دسترس بستگی دارد. اگر اکسیژن کافی در محیط واکنش حضور داشته باشد، واکنش سوختن کامل انجام می‌شود و گاز CO_2 و بخار آب تولید می‌شود. در این حالت، معادله واکنش به‌صورت زیر است:

انرژی + فراورده‌های دیگر + بخار آب + کربن‌دی‌اکسید ← اکسیژن + سوخت فسیلی

اگر مقدار اکسیژن موجود در محیط واکنش کم باشد، به‌جای گاز CO_2، گاز CO به همراه دیگر فراورده‌ها تولید می‌شود. در این حالت، گفته می‌شود سوختن ناقص است. معادله واکنش سوختن ناقص سوخت‌ها به‌صورت زیر است:

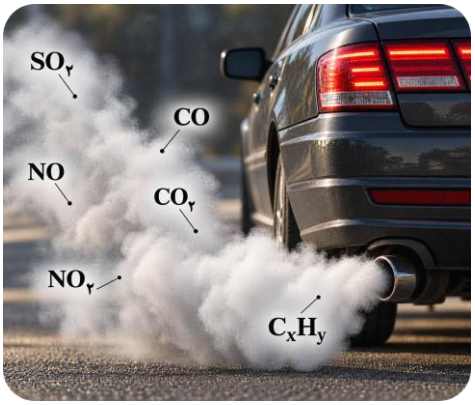
انرژی + فراورده‌های دیگر + بخار آب + کربن مونوکسید ← اکسیژن + سوخت فسیلی

با توجه به رنگ شعله حاصل از یک سوخت فسیلی، می‌توان نوع واکنش سوختن را تشخیص داد. رنگ زرد شعله، نشان‌دهنده سوختن ناقص است درحالی‌که رنگ آبی شعله، نشان می‌دهد که وسیله گازسوز به‌درستی کار می‌کند و اکسیژن کافی در محیط واکنش وجود دارد. تصویر زیر، نمایی از واکنش سوختن کامل و ناقص گاز شهری را نشان می‌دهد:

سوختن کامل　　سوختن ناقص



د) اغلب آلاینده‌هایی که بر اثر سوزاندن سوخت‌های فسیلی از اگزوز خودروها خارج می‌شوند، اکسیدهای عناصر نافلزی یا همان اکسیدهای اسیدی هستند. به‌عنوان مثال، اکسیدهای گوگرد، نیتروژن و کربن، جزو اکسیدهای خارج‌شده از اگزوز خودروها هستند. علاوه بر این مواد، برخی از مواد حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها مثل C_xH_y نیز از اگزوز خودروها به‌عنوان آلاینده خارج می‌شوند که اصلاً خاصیت **اسیدی** یا **بازی ندارند**.



SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۹۴- پس از موازنه معادله‌های زیر، تفاوت مجموع ضرایب مواد در واکنش I و واکنش II کدام است و چند درصد مولی از فراورده‌های تولید شده در واکنش دوم، مولکولی هستند؟

I) $P_4(s)+H_2SO_4(aq)\rightarrow H_3PO_4(aq)+SO_2(g)+H_2O(l)$

II) $NaClO_3(aq)+NH_3(g)\rightarrow N_2(g)+NaCl(aq)+H_2O(l)$

۱) ۲۳ - ۸۰ ۲) ۲۳ - ۶۰ ۳) ۲۱ - ۸۰ ۴) ۲۱ - ۶۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۰۰۲)

در واکنش اول، پیچیده‌ترین ترکیب، H_3PO_4 یا همان فسفریک اسید است. به همین دلیل، برای موازنه، ضریب ۱ را به H_3PO_4 می‌دهیم. ضریب $P_4(s)$ نیز برابر با $\frac{1}{4}$ می‌شود. چون موازنه به بن‌بست می‌خورد، ضریب H_2SO_4 و SO_2 را برابر با a قرار می‌دهیم تا تعداد اتم گوگرد نیز در دو سمت برابر شود. در این حالت، معادله واکنش به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{4}P_4(s)+aH_2SO_4(aq)\rightarrow 1H_3PO_4(aq)+aSO_2(g)+H_2O(l)$$

به منظور موازنه تعداد اتم هیدروژن در معادله واکنش، ضریب آب را نیز برابر با $a-\frac{3}{2}$ قرار می‌دهیم. بر این اساس، داریم:

$$\frac{1}{4}P_4(s)+aH_2SO_4(aq)\rightarrow 1H_3PO_4(aq)+aSO_2(g)+(a-\frac{3}{2})H_2O(l)$$

در قدم بعد، معادله مربوط به موازنه تعداد اتم اکسیژن در دو سمت این واکنش را تشکیل می‌دهیم تا مقدار a به‌دست بیاید. در این رابطه، داریم:

$$\text{تعداد اتم اکسیژن فراورده‌ها}=\text{تعداد اتم اکسیژن واکنش‌دهنده‌ها} \Rightarrow 4a=4+2a+(a-\frac{3}{2}) \Rightarrow a=2/5$$

بر این اساس، معادله مورد نظر به‌صورت زیر می‌شود:

$$\frac{1}{4}P_4(s)+\frac{5}{2}H_2SO_4(aq)\rightarrow 1H_3PO_4(aq)+\frac{5}{2}SO_2(g)+1H_2O(l)$$

اتم‌های موجود در دو طرف معادلهٔ واکنش، موازنه شده‌اند. کافی است همهٔ ضرایب را در ۴ ضرب کنیم تا ضرایب کسری از بین بروند. بر این اساس، داریم:

$$P_4(s)+10H_2SO_4(aq)\rightarrow 4H_3PO_4(aq)+10SO_2(g)+4H_2O(l)$$

در معادله دوم، پیچیده‌ترین ماده معادل با $NaClO_3$ است، پس به این ماده ضریب یک می‌دهیم. برای موازنه واکنش دوم، ابتدا ضریب ۳ را قبل از H_2O و ضریب یک را نیز قبل از سدیم کلرید قرار می‌دهیم. در قدم بعد، ضریب ۲ را قبل از آمونیاک و ضریب یک را قبل از نیتروژن قرار می‌دهیم. در این حالت، طبق معادلهٔ زیر همهٔ اتم‌ها در دو طرف موازنه می‌شوند:

$$1NaClO_3(aq)+2NH_3(g)\rightarrow 1N_2(g)+1NaCl(aq)+3H_2O(l)$$

مجموع ضرایب مواد در واکنش اول برابر با ۲۹ و مجموع ضرایب مواد در معادله دوم برابر با ۸ است؛ بنابراین تفاوت مجموع ضرایب این دو واکنش برابر ۲۱ می‌باشد. توجه داریم که در واکنش دوم، مجموعاً ۵ مول فراورده تولید شده است که از این مقدار، ۴ مول آن (آب و نیتروژن) از مواد مولکولی تشکیل شده‌اند. این مقدار، معادل با ۸۰٪ از کل فراورده‌های تولید شده است.

۹۵- کدام‌یک از مطالب زیر درست است؟

۱) در یک روز زمستانی، حداکثر دمای محیط درون یک گلخانه در مقایسه با محیط بیرون گلخانه کمتر است.
۲) با افزایش غلظت گاز کربن‌دی‌اکسید در هواکره، میانگین سطح جهانی آب‌های آزاد نیز افزایش پیدا می‌کند.
۳) گازهای گلخانه‌ای از جمله بخار آب موجود در هوا، مانع از خروج بیش از ۹۰٪ گرمای آزاد شده از زمین می‌شوند.
۴) از میان منابع تولیدکننده برق، نفت خام در مقایسه با یک نمونه گاز طبیعی، مقدار کمتری از CO_2 را تولید می‌کند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ خط‌به‌خط و مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۹ ـ ۱۰۰۲)

بررسی سریع:

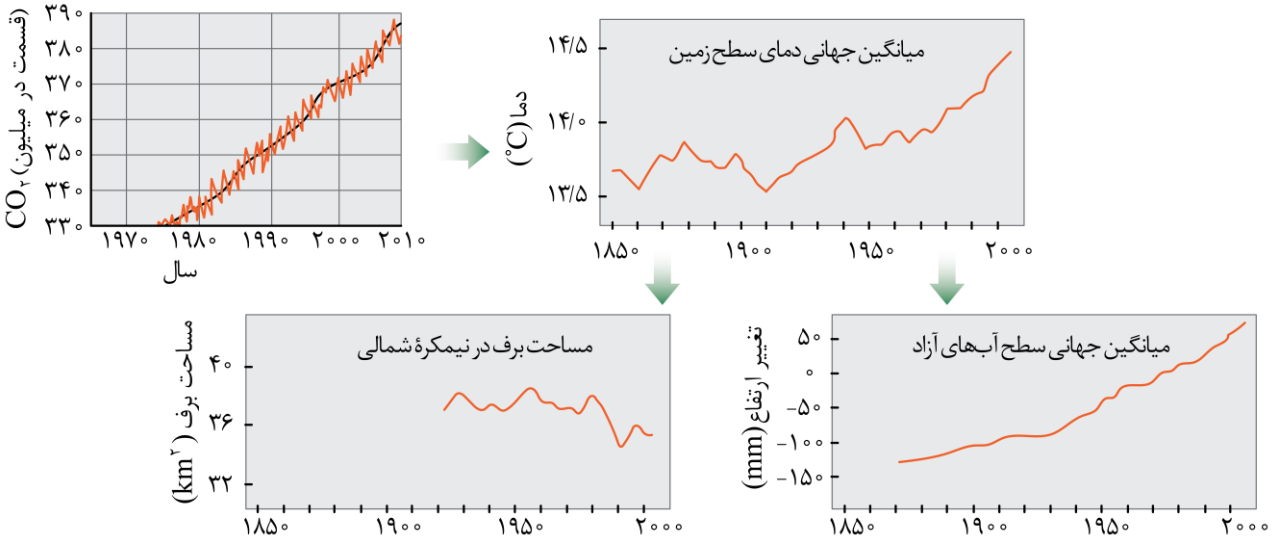
۱. در یک روز زمستانی حداکثر دمای درون گلخانه از بیرون گلخانه بیشتر است.

۲. افزایش گاز کربن دی‌اکسید باعث ذوب شدن یخچال‌ها و افزایش میانگین سطح آب‌های آزاد شده است.

۳. گازهای گلخانه‌ای مانع از خروج بخش کوچکی از گرمای آزاد شده از زمین می‌شوند نه ۹۰ درصد آن!

۴. نفت خام در مقایسه با گاز طبیعی مقدار بیشتری گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌کند.

سالانه میلیاردها تن CO_2 به هواکره وارد می‌شود. مقدار این گاز در سده اخیر در هواکره افزایش یافته است. نمودارهای زیر، تغییر مقدار گاز CO_2 در هواکره، میزان بالا آمدن سطح آب دریاها، تغییر میانگین دمای زمین و میانگین مساحت برف در نیمکره شمالی را نشان می‌دهند:



اندازه‌گیری دما در کره زمین

دانشمندان با استفاده از بالون‌های هواشناسی، ماهواره‌ها، کشتی‌های اقیانوس‌پیما و گویچه‌های شناور در دریاها که به دماسنج مجهز هستند، پیوسته دمای کرهٔ زمین را رصد می‌کنند. با توجه به ایجاد اثر گلخانه‌ای، میانگین دمای هوا افزایش یافته است. این افزایش دما سبب شده تا شرایط آب و هوایی در نقاط گوناگون زمین تغییر کند. با توجه به تغییرات آب و هوایی ایجاد شده، فصل بهار در نیمکره شمالی، نسبت به ۵۰ سال گذشته در حدود یک هفته زودتر آغاز می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) در طول یک روز زمستانی، دمای محیط درون گلخانه در بازه بین ۱۳/۵ تا ۱۴/۵ تغییر کرده و دمای محیط بیرون گلخانه در بازهٔ بین ۱/۵ تا ۸ درجه سانتی‌گراد تغییر می‌کند. همان‌طور که مشخص است، حداکثر دمای محیط درون یک گلخانه در مقایسه با محیط بیرون گلخانه بیشتر است.

گلخانه‌ها

گلخانه‌ها، زمین‌های کشاورزی ویژه‌ای هستند که دور تا دور آن‌ها را تا ارتفاع معینی با لایه‌ای از انواع پلاستیک‌های شفاف می‌پوشانند و در آن‌ها گیاهان و میوه‌های گوناگونی پرورش می‌دهند. گلخانه، گیاه یا میوه را از آسیب‌های ناشی از تغییر دما و آفت‌ها حفظ می‌کند. در واقع پلاستیک موجود در اطراف گلخانه‌ها با ایجاد اثر گلخانه‌ای و جلوگیری از خروج گرما، محیط درون گلخانه را گرم‌تر از محیط بیرون کرده و از نوسانات دمایی می‌کاهد.

۳ زمین گرما را از پرتوهای خورشیدی گرفته و پس از آن، این گرما را به سمت **هواکره** بازتاب می‌کند. گازهای گلخانه‌ای از جمله **بخار آب** و **گاز کربن‌دی‌اکسید** موجود در هواکره زمین، مانع از خروج بخش کوچکی (در حدود ۱۰ درصد) گرمای آزاد شده از زمین می‌شوند. طی این فرایند، مقداری از گرما در زمین محبوس شده و منجر به افزایش دمای کره زمین می‌شود. تصویر زیر، نمایی از فرایند جذب و بازتاب پرتوهای خورشیدی توسط زمین را نشان می‌دهد:



پرتوهای خورشیدی

سرنوشت پرتوهای خورشیدی تابیده‌شده به سمت زمین، به‌صورت زیر است:

پرتوهای خورشیدی تابیده‌شده به سمت زمین		
بخش عمده	بخش کوچک	بخش کوچک
به وسیله زمین جذب می‌شوند.	توسط هواکره به سمت خارج بازتاب می‌شوند.	توسط هواکره جذب می‌شوند.

مطابق این نمودار، بخش کوچکی از پرتوهای خورشیدی تابیده‌شده به سمت زمین، به وسیله هواکره جذب می‌شوند. پرتوهای جذب‌شده توسط زمین، باعث گرم شدن کره زمین می‌شوند. گرمای مورد نظر، مجدداً توسط زمین به سمت هواکره دفع می‌شود. سرنوشت این گرمای دفع شده نیز به‌صورت زیر است:

گرمای دفع‌شده توسط کره زمین	
بخش عمده	بخش کوچک
به‌صورت تابش‌های فروسرخ از زمین دفع شده و خارج می‌شود.	توسط هواکره و گازهای گلخانه‌ای، در زمین محبوس می‌شود.

۴ نمودار زیر میزان تولید (ردپای) کربن‌دی‌اکسید را در منابع تولیدکننده برق نمایش می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، بیشترین ردپای کربن‌دی‌اکسید مربوط به **زغال سنگ** است. همچنین، نفت خام نسبت به گاز طبیعی مقدار CO_2 بیشتری تولید می‌کند.

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

میخوای خوندن پاسخ‌نامه رو راحت‌تر کنی!
پس بیا پاسخ ویدیویی‌اش رو ببین!

پس از پایان آزمون، می‌تونین پاسخ‌نامهٔ ویدیویی و تشریحی این آزمون رو در پنل ماز، از بخش آزمون‌ها مشاهده کنید.

پنل کاربری ماز ◀ بخش آزمون‌ها ◀ آزمون‌های برگزارشده ◀ پاسخنامه ویدیویی